Mükemmel Karma Sorusunun Yanıtı

Akın Sarıgül*

Soru: 52'lik iskambil kâğıdı destesini şu yöntemle karmak istiyoruz: Desteyi tam ortadan (26–26) ikiye bölelim. Destenin üst yarısı sol, alt yarısı sağ elimizde olsun… Sonra, bilinen fiyakalı yöntemle, alttan başlamak üzere, bir kâğıt sağ desteden, bir kâğıt sol desteden olmak üzere sırayla kâğıtları karalım. Önce sağ desteden başlayacağız, bu önemli. Yani en üstteki ve en alttaki kâğıtlar yerinde kalacaklar, üstten 27. kâğıt karmadan sonra üstten ikinci kâğıt olacak, üstten ikinci kâğıt üstten üçüncü kâğıt olacak, üstten 28. kâğıt üstten dördüncü olacak... Bu işlemi kaç kez tekrarlarsak kâğıtlar eski yerlerine gelirler?

Bu sorunun yanıtını bulmak için aşağıdaki eşleşmenin derecesini bulmalıyız:

(1)(2, 27, 14, 33, 17, 9, 5, 3)(4, 28, 40, 46, 49, 25, 13, 7)(6, 29, 15, 8, 30, 41, 21, 11)(10, 31, 16, 34, 43, 22, 37, 19)(12, 32, 42, 47, 24, 38, 45, 23)(18, 35) (20, 36, 44, 48, 50, 51, 26, 39)(52).

Demek ki tam sekiz karmada kâğıtlar eski yerlerine gelirler.

Ya önce sol desteden kâğıt alsaydık, yani üstten 27. kâğıt birinci kâğıt olsaydı? O zaman destenin eski haline gelmesi için kaç kez karmalıyız?

Bu ikinci sorunun yanıtını bulmak için aşağıdaki eşleşmenin derecesini hesaplamalıyız: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 11, 22, 44, 35, 17, 34, 15, 30, 7, 14, 28, 3, 6, 12, 24, 48, 43, 33, 13, 26, 52, 51, 49, 45, 37, 21, 42, 31, 9, 18, 36, 19, 38, 23, 46, 39, 25, 50, 47, 41, 29, 5, 10, 20, 40, 27).

Demek ki bu sefer tam 52 karma sonunda ilk başladığımız duruma geleceğiz.

2n kâğıtlı bir desteyi bu yöntemlerden biriyle kararsak, kâğıtlar kaç karmada en baştaki duruma gelirler?

Yanıt: İkinci tür karmadan başlayalım. Birinci tür karma daha kolay olacak.

Herhangi bir n sayısı için sorulan genel soruyu yanıtlamak için, önce, yukarda $n = 26$ için verilen yanıtı biraz değişik bir biçimde bulmak istiyorum.

Desteyi eşit iki parçaya ayırıyoruz: sol ve sağ desteler. İlk karmadan sonra sol destedeki her kâğıdın üstüne bir kâğıt geliyor, dolayısıyla sol destedeki k-inci sıradaki kağıt birinci karmadan sonra $2k$-inci kâğıt oluyor. Bu dediğimiz, sağ destedeki kâğıtlar için de geçerli, yalnız "modulo 53" almak koşuluyla... Nitekim, sağ destenin birinci kâğıdı, yani 27 numaralı kâğıt, 54üncü değil 1inci kâğıt oluyor; 28 numaralı kâğıt 56ıncı değil 3üncü kâğıt oluyor...

Demek ki, her kâğıdın yeri her karmadan sonra "modulo 53" ikiyle çarpılıyor. Dolayısıyla a sayılı kâğıt k karmadan sonra $a2^k$ sayılı kâğıt oluyor. Demek ki, her $a = 1, ..., 52$ için, $a \equiv a2^k \pmod{53}$ koşullarını sağlayan en küçük k'yi bulmam gerekiyor. Yukardaki denklemi $a = 1$ için çözmek yeterli elbet. Belki biraz uzun ama kolay bir hesapla $k = 52$ bulunur.[1] 26 yerine herhangi bir n almak, düşünme biçimimizde bir değişiklik gerektirmez. Kâğıtları eski yerine getiren en küçük karma sayısı,

$$2^k \equiv 1 \pmod{2n+1}$$

koşullarını sağlayan en küçük k sayısıdır. Her şeyden önce şunu söyleyelim: $2n+1$ tek bir sayı olduğundan, her zaman böyle bir k sayısı vardır. Vardır da kaçtır?

Eğer $2n + 1$ asalsa k, $2n$'yi böler, bu Fermat'nın Küçük Teoremi aşağı yukarı. Ama $2n$ olmak zorunda değil. Örneğin, $n = 3$ ise, $k = 3 \neq 6 = 2n$.

Eğer $2n + 1$ bir asalın gücüyse, diyelim p^α ise, k, $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ sayısını böler. Bunu kanıtlamak için biraz soyut cebir gerekiyor.

Daha genel olarak, $2n + 1$ sayısını asallarına ayıralım: $2n + 1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ (burada p_i'ler birbirinden değişik asal sayılar ve α_i'ler 0'dan büyük tamsayılar.) O zaman k,

$$(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_t^{\alpha_t} - p_t^{\alpha_t-1})$$

sayısını böler.

k'nin tam kaç olması gerektiği konusunda bir fikrim yok.

Birinci Tür Karma. Birinci tür karmanın ikinci tür karmadan tek farkı birinci ve sonuncu kâğıtlar yer değiştirmiyor olması. Bu kâğıtları desteden atarsak geri kalan kâğıtlar aynen yukardaki karmadaki gibi yer değiştirirler. Demek ki burada,

$$\text{her } a = 1, ..., 52 \text{ için } a \equiv a2^k \pmod{2n-1}$$

koşulunu sağlayan en küçük k'yi, yani

$$2^k \equiv 1 \pmod{2n-1}$$

denklemini sağlayan en küçük k'yi bulmalıyız. $n =$

1 Fermat'nın küçük teoreminden, 53 asal olduğu için, yanıtın 53'ten küçük olduğunu biliyoruz. Biraz basit aritmetikle yanıtın 52'yi bölmesi gerektiği anlaşılır. Yanıt tam 52 çıkıyor...)

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğrencisi.