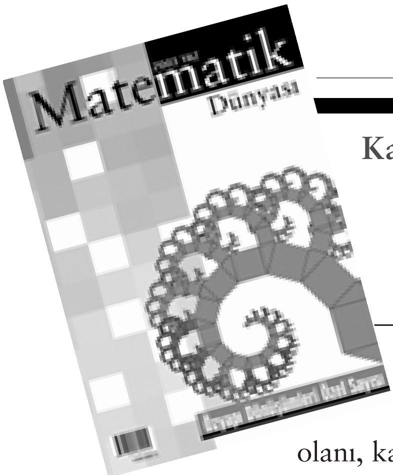


Kapak Konusu: Özyapı Dönüşümleri

Özyapı Dönüşümleri Üzerine Felsefi Laklak

Bu sayıda önemli olanı, öbürlerinden değişik olanı, kalabalıktan sıyrılanı, kişiliği olanı irdeleyeceğiz. Tabii, aynı zamanda – kaçınılmaz olarak – birbirine benzeyenleri de...

Kapak konumuz olan **özyapı dönüşümleri** matematik tarihinde oldukça yeni bir kavram. Modern matematiğin en önemli, en başat, en ince, en estetik, en güzel ve en şey kavramlarından biri.

Kedi Köpek Börtü Böcek. Bir şeye bir ad verebilmemiz için o şeyden bir tane olmalıdır. Örneğin, adına "kedi" dediğimiz tek bir hayvan vardır. Kedileri köpeklerden ayrıştırabildiğimizden kedilere "kedi", köpeklere "köpek" deriz. Kedilerle köpekleri ayrıştıramayan bir varlık, kedilere, onları köpeklerden ayıran özel bir ad veremez.

Evimizdeki kedinin özel bir adı varsa, o kediden (bize göre) bir tane olduğundandır, o kedi bize göre ve bizim için özeldir, o kedi bizim için özel olduğundan ve biz de özel bir kişi olduğumuzdan, o kedi herkes için özel bir kedidir. Evimizdeki kedinin dünyanın tüm öbür kedilerine göre bir ayrıcılığı vardır, bu yüzden ona bir ad vermişizdir, daha doğrusu verebilmişizdir.

Birbirine tıpatıp benzeyen, birbiri arasında hiçbir ayrım görülmeyen iki kediye iki ayrı ad vermenin pek bir anlamı yoktur, hatta nerdeyse olanağı da yoktur, sadece geçici bir süre için ad verebiliriz, ertesi gün hangisine ne ad verdiğimizi anlayamayız.

Örneğin evimizdeki sineklere ad vermeyiz, veremeyiz, hangi sineğin hangi sinek olduğu anlaşılmaz. Atsineklerini kara sineklerden, kara sinekleri sivrisineklerden ayırabilsek bile, örneğin kara sinekleri genellikle birbirinden ayırmak olanaksızdır.

Bir kümesteki hayvanları saymamız istenirse ve hayvanları teker teker sayarsak, hayvanlara geçici bir süre için "bir, iki üç" gibi adlar veririz. Ama bu adlar geçicidir. Kümeste bulunan hayvanları hangi sırayla saydığımız önemli değildir. Daha sonra unuturuz sıralamayı. Bir başkası başka bir sırayla sayabilir.

Ama bizden kümesteki horozları, tavukları, civcivleri, hindileri, ördekleri ayrı ayrı saymamız istenirse, o zaman horozlara "Horoz 1, Horoz 2, Horoz 3", tavuklara "Tavuk 1, Tavuk 2, Tavuk 3" gibi geçici adlar veririz. Hayvanların cinsi ve yaşı bu kez önemli olduğundan (daha önce değildi), tavukları, horozları, civcivleri, hindileri, ördekleri birbirinden ayrıştırırız. Horozların numaraları önemli değildir, önemli olan sadece horoz olduklarıdır.

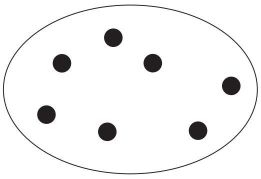
Her ne kadar kâğıt paraların üstünde seri numarası yazıyorsa da, bu numara genellikle pek umurumuzda olmadığı için, paraları da birbirinden ayırdetmeyiz. Cüzdanınızdaki 1 milyon TL'yi başka bir 1 milyon TL'likle değiştirsem, büyük bir olasılıkla ruhunuz duymaz.

Heyecan Başlıyor. Bu kadarlık hayvan muhabbeti yeter!

Matematiksel bir yapının özyapı dönüşümleri işte aşağı yukarı yukarda açıklamaya çalıştığımızı yapar: Neyin neye benzediğini, neyin neye benzemediğini, neyin değişik olduğunu anlar. Biçimsel tanımı çok daha sonra vereceğiz. Bu ve bundan sonraki yazılarda (birbirinden ilginç, hiç kuşkunuz olmasın!) örnekler ele alacağız.

Şimdilik matematiksel bir kavram tanımlamadığımızdan, neye örnek verdiğimizi söylemek bir hayli zor. "Benzemek", "benzeşmek", "arada fark olmamak", "öbürlerinden farklı olmak" gibi okurun sezgisel olarak algıladığı kavramlara örnek vereceğiz.

İlk örneğimiz biraz fazla basit olacak. Örnek basit olmalı ama bu kadar da basit olmamalı, bu kadar basit bir örnek okura herhangi bir sezgi kazandırmaz. Ama biz gene de bu basit örneği verelim, ikinci okuyuşta bu örnek daha bir anlam kazanacaktır.



Bu kümenin elemanları arasında hiçbir fark yok. Nasıl bir fark olabilir ki! Neden bir fark olsun ki!

İlk Örnek. Sadece bir küme olarak görülen bir kümenin herhangi iki elemanı arasında hiçbir fark yoktur. Dolayısıyla doğal sayılar kümesine *sadece* bir küme olarak baktığımızda 0'la 2003 sayıları arasında hiçbir fark yoktur. (Daha ilginç örnekler aşağıda.)

İkinci Örnek. Doğal sayılar kümesini sadece bir küme olarak irdelemek doğal sayılara haksızlık olur. Çünkü doğal sayılarla işlemler yapabiliriz ve doğal sayılar aslında bu işlemleri yapabilelim diye icat edilmişlerdir. Örneğin iki doğal sayıyı toplayabiliriz. Şimdi, doğal sayılar kümesini toplama işlemiyle birlikte irdeleyelim. Doğal sayıları toplamayla birlikte irdelediğimizde 0'la 1 arasında bir fark buluruz, çünkü 0 toplamanın etkisiz elemanıdır, yani "her y doğal sayısı için $0 + y = y$" özelliği doğrudur, ve burada 0 yerine 1 koyarsak bu özellik artık doğru olmaz. Dolayısıyla toplama işlemi gözönüne alındığında 0'la 1 arasında bir ayrım vardır. Hatta 0 diğer bütün elemanlardan bu özelliğiyle ayrılır, bu özelliğe sahip 0'dan başka bir doğal sayı yoktur.

0 sayısını toplama işlemine göre diğer doğal sayılardan ayıran özellik şudur:

"Her y doğal sayısı için $x + y = y$."

Bu özelliğini sağlayan tek x doğal sayısı 0'dır.

Daha gizemli bir dille söylemek gerekirse: Toplama işlemi doğal sayılarda 0'ın ayrıcalığını algılayabilecek güçtedir.

Peki toplama 1'in özel bir sayı olduğunu algılayabilir mi? Ya 2'nin? Ya diğer sayıların? Evet. Herbiri toplama için ayrı ayrı, özel sayılardır. Örneğin 3, sıfırdan değişik üç doğal sayının toplamı olan, ama sıfırdan değişik dört doğal sayının toplamı olmayan tek doğal sayıdır. Yani 3, aşağıdaki önermeleri doğrulayan tek x doğal sayısıdır:

"$x = a + b + c$, $a + a \neq a$, $b + b \neq b$, $c + c \neq c$ ilişkilerini sağlayan a, b, c, doğal sayıları vardır"

ve

"Eğer $a + a \neq a$, $b + b \neq b$, $c + c \neq c$, $d + d \neq d$ ise, $x \neq a + b + c + d$."

Birinci önerme x'in en az 3 olduğunu söyler, ikinci önermeyse x'in 3'ten büyük olmadığını.

Üçüncü Örnek. Doğal sayıları bu kez çarpma işlemiyle irdeleyelim. 0 gene özeldir, çünkü 0, her y doğal sayısı için $0y = 0$ eşitliğini sağlayan tek doğal sayıdır. Yani,

"her y doğal sayısı için $xy = x$"

özelliğini sağlayan tek x doğal sayısı 0'dır. Demek çarpma işlemi de toplama gibi 0'ı diğer doğal sayılardan ayrıştırabiliyor.

Peki, bu örnekte 1 diğer sayılardan değişik midir? Evet, 1 sayısı, her y doğal sayısı için $xy = y$ eşitliğini sağlayan tek doğal sayıdır.

Bu örnekle ilgili bir başka soru: 2 ve 4 doğal sayıları arasında çarpma işlemi açısından bakıldığında bir ayrım var mıdır? Evet vardır. 4 sayısı, "$x = yy$ eşitliğini sağlayan bir y doğal sayısı vardır" özelliğini sağlar, ama 2 sağlamaz.

Heyecan Dorukta. Peki... Çarpma işlemi 2'yle 6 arasında bir ayrım yapabilir mi? Evet yapar. 2 doğal sayısı sadece iki değişik biçimde iki doğal sayının çarpımı olarak yazılabilir:

$$2 = 1 \times 2 = 2 \times 1.$$

Ama 6 doğal sayısı dört değişik biçimde iki doğal sayının çarpımı olarak yazılır:

$$6 = 1 \times 6 = 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6 \times 1.$$

Doğal sayılarda çarpma işlemi 2'yle 3 arasında bir ayrım yapabilir mi? Yanıtı burada söylemeyeceğim. Bu sayıda bir yerlerde olmalı yanıt. ♥