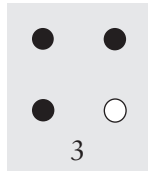


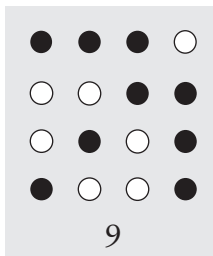
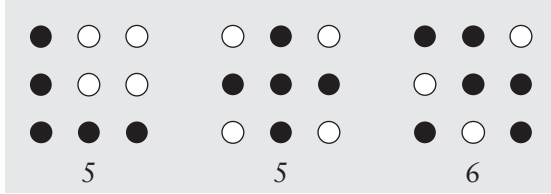
# Karenin Dikdörtgensiz Altkümeleri

$n \geq 2$  herhangi bir tamsayı olsun.  $n \times n$  noktadan oluşan düzgün bir kare ele alalım, aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi. Bu  $n^2$  noktanın “dikdörtgensiz” altkümeleriyle ilgileneceğiz, yani herhangi bir dikdörtgenin dört köşesini birden içermeyen altkümeleriyle. Bu tür altkümelere **dikdörtgensiz altküme** diyelim. Burada “dikdörtgen”, kenarları yatay ve dikey olan dikdörtgen anlamına kullanılmaktadır.



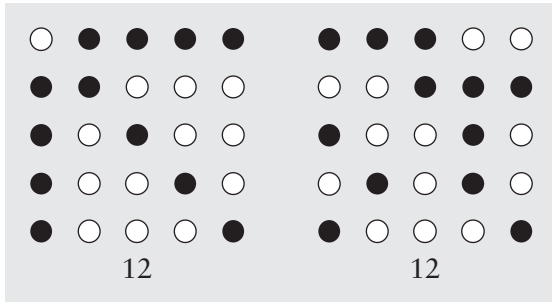
Eğer  $n = 2$  ise, üç noktalı her altküme dikdörtgensiz bir altkümedir, ve dikdörtgensiz daha büyük bir altküme bulamayız. Demek ki  $n = 2$  ise, dikdörtgensiz en büyük altkümenin nokta sayısı 3'tür.

Eğer  $n = 3$  ise, dikdörtgensiz bir-sürü altküme bulabiliriz. Aşağıdaki bu altkümelere üçü görünüyor (seçtiğimiz noktaları siyah yaptık.). Bunlardan en sonuncusunun 6 noktası var. Bundan daha kalabalık dikdörtgensiz bir altküme bulamayız. (Neden?)



Şimdi  $n = 4$  olsun. En kalabalık dikdörtgensiz altküme 9 noktadan oluşur, bunun kanıtı oldukça kolaydır. O kare solda.

Eğer  $n = 5$  ise, 12 noktalı dikdörtgensiz bir altküme bulabiliriz. Hatta, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, değişik yapıda iki dikdörtgensiz altküme bulabiliriz.

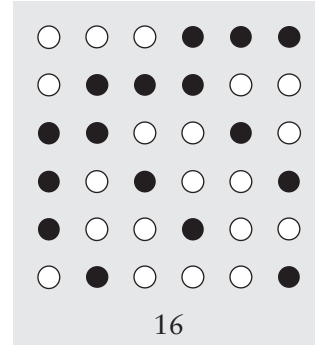


$n = 2, 3, 4, 5$  için şimdiye kadar bulduğumuz dikdörtgensiz en büyük altkümelerin eleman sayılarını yazalım:

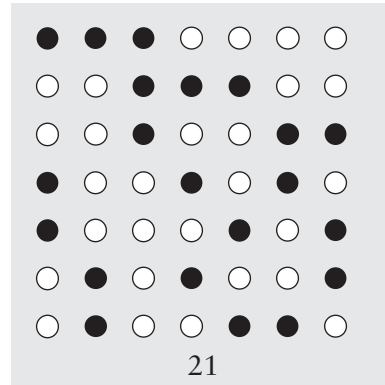
3, 6, 9, 12.

Sanki bir düzen var... Karesiz en büyük altkümenin eleman sayısı sanki  $3(n - 1)$  gibi...

Eğer  $n = 6$  ise dikdörtgensiz en büyük altkümenin kaç elemanı var? Yukardaki diziyeye bakalım olursak yanıtımız 15 olmalı. Nitekim 15 noktalı ve daha da büyütülemeyen dikdörtgensiz bir altküme var. Ama 16 elemanlı bir başka dikdörtgensiz altküme daha var...



Eğer  $n = 7$  ise 21 noktalı dikdörtgensiz bir altküme bulabiliyoruz,  $3(n - 1)$ 'den fazla...



Yaşam her zaman basit olmuyor...

Bu konuda soru sormayı okura bırakıyoruz.

İlginç bir soru soralım ama.  $n$  sonsuza giderken, dikdörtgensiz en büyük altkümenin toplam noktalara oranı, yani,  $3/2^2$ ,  $6/3^2$ ,  $9/4^2$ ,  $12/5^2$ ,  $16/6^2$ ,  $21/7^2$  dizisi bir sayıya yakınsıyor mu? Yakınsıyorsa kaçta yakınsıyor? Yukardaki dizi hep azalıyor mu? Bu soruların yanıtını bu soruları soran da bilmiyor. ♠