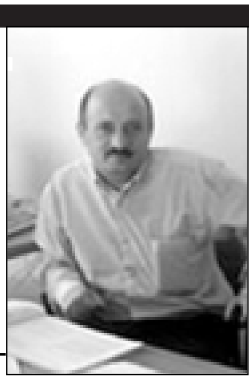
Problemler ve Çözümleri



Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Not

Bu bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 15 Nisan 2003 tarihine kadar adıma gönderiniz.

Alıştırma Problemleri

A276. $x^2 - 6y^2 = 2003$ eşitliğini sağlayan x ve y tam sayıları var mıdır?

A277. *ABCFGH* dışbükey altıgeninde (yani kenarlardan herhangi biri uzatıldığında altıgenin tamamı uzatılan kenarın aynı bölgesinde kalan bir altıgende) $AB = CF = GH$, $\alpha(A) = \alpha(C) = \alpha(G)$ ve $\alpha(B) = \alpha(F) = \alpha(H)$ ise[1], $BC = FG = HA$ olduğunu gösteriniz.

A278. Bir sınıftaki öğrencilerin yedide biri erkektir. Sınıfa on üç yeni öğrenci gelince erkeklerin sayısı artar ancak sınıftaki yüzdesi azalır. Kızların sayısı kaç arttı?

A279. Bir kutuda yeşil, sarı ve kırmızı elmalar bulunur. Bunlar Amasya, Bursa ve Gülbahçe elmalarıdır. Yeşil elmaların sayısı Amasya elmalarının sayısından, Amasya elmalarının sayısı sarı elmaların sayısından, sarı elmaların sayısı Bursa elmalarının sayısından, Bursa elmalarının sayısı kırmızı elmaların sayısından, kırmızı elmaların sayısı da Gülbahçe elmalarının sayısından daha fazladır. Böyle bir durum olabilir mi?

A280. $P(x)$, katsayıları tamsayı olan bir polinomdur (bkz. sf. 49) ve üç değişik x tamsayısı için değeri 1'dir. $P(x)$'in tamsayı kökünün olmadığını kanıtlayın.

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.
1. α (H), H'nin açısı anlamına gelir.

Yarışma Problemleri

Y276. m ve n tamsayıları 1'den büyük. $n^3 - 1$ sayısı m'ye, $m - 1$ de n'ye bölünür. $m = n^{3/2} + 1$ ve $m = n^2 + n + 1$ eşitliklerinden birinin doğru olması gerektiğini kanıtlayın.

Y277. Ters yazılımıyla çarpıldığında, son üç basamağı sıfır olan sekiz basamaklı bir sayı veren tüm dört basamaklı sayıları bulun.

Y278. $2n + 1$ kişiden oluşan bir toplulukta, her n kişilik grubun tüm bireylerini tanıyan ve bu grupta bulunmayan biri vardır. Bu toplulukta herkesi tanıyan birinin varlığını kanıtlayın.

Y279. Tekdüze (monoton) artan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(0) = 0$ eşitliğini ve $f(1) > 1$ eşitsizliğini sağlar ve ayrıca eğer a, b, $a + b \in [0,1]$ ise

$$f(a) + f(b) \geq f(a + b)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

$$s_n = f(1) + f(1/2) + f(1/3) + \ldots + f(1/n)$$

dizisinin sınırlı olmadığını gösterin.

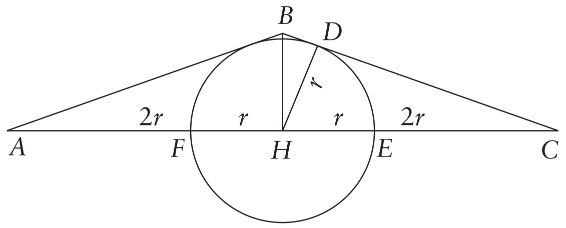
Y280. Her üç elemanından en az birinin yine o üçlüden bir başkasına bölündüğü sonlu bir pozitif tamsayılar kümesi verilmiştir. Bu kümenin tüm elemanlarının, aynı renkten olan her iki elemandan biri diğerini bölecek şekilde iki renge boyanabileceğini kanıtlayınız.

Geçmiş Soruların Çözümleri

A266. *3698765432123456789 ve 345678909876543 sayılarının çarpımı kaç basamaklıdır?*

Çözüm. Sayıları sırasıyla a ve b ile gösterelim. O halde $36 \times 10^{17} < a < 37 \times 10^{17}$ ve $34 \times 10^{13} < b < 35 \times 10^{13}$ eşitsizlikleri sağlanır. Buradan, $1224 \times 10^{30} < ab < 1295 \times 10^{30}$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla ab sayısı 34 basamaklıdır.

A267. *Merkezi ABC ikizkenar (AB=BC) üçgeninin AC kenarı üzerinde bulunan çember AB ve BC kenarlarına teğettir ve ayrıca AC kenarını üç parçaya böler. Üçgenin yüksekliği BH olsun. BH × AC =* $18\sqrt{2}$ *ise, çemberin yarıçapı kaçtır?*



Çözüm. Çemberin yarıçapını r ile gösterelim. $AF = FE = EC = 2r$ (şekle bakınız) olduğundan $CD = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2r\sqrt{2}$ elde edilir. CHB ve CDH üçgenlerinin benzerliğinden, $BH/r = BH/HD = CH/CD = 3r/2r\sqrt{2} = 3/2\sqrt{2}$ buluruz. Bunları koşuldaki eşitlikte yerine yazdığımızda, önce

$$\frac{3r}{2\sqrt{2}} \times 6r = 18\sqrt{2},$$

buradan da $r = 2$ elde ederiz.

A268. *-7'den 7'ye kadar olan tüm tamsayılar, her sayının iki komşusunun çarpımı negatif olmayacak biçimde çember boyunca dizilebilir mi?*

Çözüm. Böyle bir dizilimin bulunduğunu varsayalım. 0'dan başlayarak sayıları saat yönünde a_0, a_1, ..., a_{14} ile gösterelim. O halde, a_2'nin iki komşusu olan a_1 ve a_3 sayılarının işaretleri aynıdır (ya ikisi de pozitif ya da ikisi de negatiftir.) Benzer biçimde a_3 ile a_5, a_5 ile a_7, a_7 ile a_9, a_9 ile a_{11} ve a_{11} ile a_{13} sayılarının işaretleri aynıdır. Aynı nedenden, a_2, a_4, ..., a_{14} sayılarının işaretleri aynıdır. Diğer taraftan a_0'ın iki komşusu olan a_1 ile a_{14}'ün işaretleri aynıdır. Dolayısıyla a_0 dışında tüm sayıların işaretleri aynıdır. Çelişki! Böylece koşulları sağlayan bir dizilim mümkün değildir.

A269. *$[x]$, x gerçel sayısının tam değerini, $\{x\} = x \times [x]$ de kesir değerini göstermek üzere,*

$$[x] \times \{x\} \geq 3$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif gerçel x sayıyı bulun.

Çözüm. $[x] \times \{x\} < [x]$ olduğundan $[x] > 3$ olması gerekir. Diğer taraftan, $[x] = 4$ alırsak, $\{x\} \geq 3/[x] = 3/4$ eşitsizliğinden, verilen koşulu sağlayan en küçük sayının $4 + 3/4 = 4{,}75$ olduğu anlaşılır.

A270. *a, b, c gerçel sayıları* $\max(a, b) + \max(c, 2002) = \min(a, c) + \min(b, 2003)$ *eşitliğini sağlar. $b \geq c$ eşitsizliğini kanıtlayın.*

Çözüm. $\max(a, b) \geq a \geq \min(a, c)$ olduğundan, önce $\min(a, c) + b \geq \min(a, c) + \min(b, 2003) = \max(a, b) + \max(c, 2002) \geq \min(a, c) + c$ elde ederiz, buradan da $b \geq c$ çıkar.

Y266. *n sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısını $\tau(n)$ ile gösterelim. $\tau(n^2 + 1)$ dizisinin hiçbir n sayısından başlayarak kesin artan olmayacağını kanıtlayınız.*

Çözüm. $n^2 + 1$ bir kare olmadığından, bölenlerinin kümesi, $d < n$ olmak üzere $\{d, \frac{n^2+1}{d}\}$ gibi ikililere ayrılabilir.

Dolayısıyla $\tau(n^2 + 1)$ çift sayıdır.

n bir çift sayıysa, $n^2 + 1$ sayısının tüm bölenleri tektir, dolayısıyla, d'nin alabileceği değerler n'den küçük olan tek sayılar olabileceğinden, $\tau(n^2 + 1) < n$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $\tau(n^2 + 1)$ dizisinin bir n_0 sayısından başlayarak kesin artan olduğunu varsayalım. O halde $\tau(n^2 + 1)$ sadece çift sayı değerleri aldığından, her $m \geq n_0$ ve $k > 0$ için,

$$\tau((m+k)^2 + 1) \geq \tau((m+k-1)^2 + 1) + 2$$
$$\geq ... \geq \tau(m^2 + 1) + 2k$$

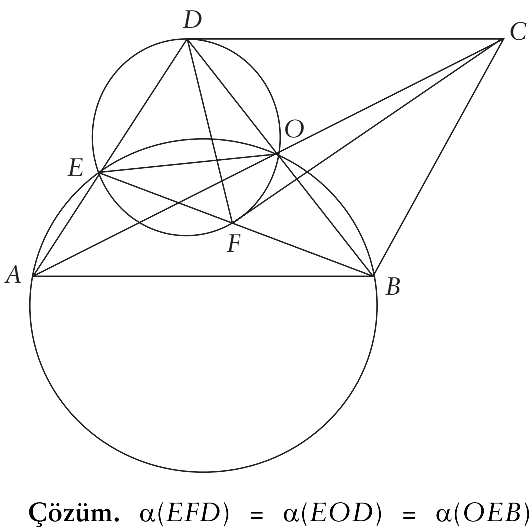
eşitsizlikleri elde edilir.

m ve k'yi çift sayı ve $k > m - \tau(m^2 + 1)$ olarak aldığımızda

$$m + k > \tau((m + k)^2 + 1) \geq \tau(m^2 + 1) + 2k,$$

buradan da $k > m - \tau(m^2 + 1) > k$ şeklinde çelişki elde edilir.

Y267. *$ABCD$ paralelkenarının köşegenlerinin kesişim noktası O olsun. ABO üçgeninin çevrel çemberi AD kenarını bir E noktasında, DOE üçgeninin çevrel çemberi de BE doğru parçasını bir F noktasında kesiyor. $\alpha(BCA) = \alpha(FCD)$ eşitliğini gösterin.*



Çözüm. $\alpha(EFD) = \alpha(EOD) = \alpha(OEB) + \alpha(EBO) = \alpha(BAD) = \alpha(BCD)$ olduğundan $BFDC$'nin bir kiriş dörtgeni olduğu (yani üstünden bir daire geçtiği) anlaşılır. O halde $\alpha(BCF) = \alpha(BDF) = \alpha(OEF) = \alpha(OAB) = \alpha(ACD)$ eşitliği, buradan da $\alpha(BCA) = \alpha(FCD)$ elde edilir.

Y268. *On kâğıt parçasının her birine birkaç tane 2'nin kuvvetlerine eşit olan sayı yazılmıştır. Tüm kâğıt parçalarındaki sayıların toplamı aynıdır. Yazılan tüm sayılar arasında en az altı kez rastlanan bir sayı bulunduğunu kanıtlayın.*

Çözüm. Bir kâğıt parçasındaki sayıların toplamı m olsun. $2^k \le m$ eşitsizliğini sağlayan en büyük k sayısını ele alalım. Tüm kâğıt parçalarındaki sayıların toplamı $10m$'dir. Diğer taraftan sayılardan hiçbirine 5'ten fazla kez rastlanmasaydı, tüm sayıların toplamı en fazla

$$5(2^k + 2^{k-1} + \ldots + 1) = 5(2^{k+1} - 1) = 10 \times 2^k - 5 < 10m$$

olabilirdi. Dolayısıyla en az altı kez rastlanan bir sayı bulunur.

Y269. *a, b, c gerçel sayıları $9a + 11b + 29c = 0$ eşitliğini sağlamaktadır. $ax^3 + bx + c = 0$ denkleminin* $[0, 2]$ *aralığında en az bir kökü bulunduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm. $f(x) = ax^3 + bx + c$ olsun. Demek ki $f(0) = c$ ve $f(2) = 8a + 2b + c$. O halde $0 = 9a + 11b + 29c = f(0) + f(2) + a + 9b + 27c = f(0) + f(2) + 27(a/27 + b/3 + c) = f(0) + f(2) + 27\,f(1/3)$, yani $f(0) + f(2) + 27f(1/3) = 0$ eşitliği elde edilir. $f(0)$, $f(1/3)$ ve $f(2)$ sayılarından biri sıfırsa, 0, 1/3 ve 2 sayılarından biri denklemin $[0, 2]$ aralığındaki bir köküdür. Eğer $f(0)$, $f(1/3)$ ve $f(2)$ sayılarının hepsi sıfırdan farklıysa, son eşitlikten dolayı, en az ikisinin işaretleri birbirinden farklıdır. O halde, $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $[0, 1/3]$, $[1/3, 2]$ ve $[0, 2]$ aralıklarının birinde denklemin kökü bulunacaktır.

Y270. *Aşağıdaki iddialardan ikisinin doğru, birinin yanlış olduğu biliniyorsa, n pozitif tamsayısını bulunuz:*

1) $n + 51$, *bir tamsayının karesidir;*
2) n *sayısının son basamağı 1'dir;*
3) $n - 58$, *bir tamsayının karesidir.*

Çözüm. İkinci iddia doğru olursa, $n + 51$ sayısının birler basamağı 2, $n - 58$ sayısının birler basamağı da 3 olur, dolayısıyla bunların hiçbiri bir tamsayının karesi olamaz. O halde ikinci iddia yanlıştır, birinci ve üçüncü ise doğru, yani $n + 51 = x^2$ ve $n - 58 = y^2$ eşitliklerini sağlayan x ve y pozitif tamsayıları bulunur. Buradan $x^2 - y^2 = 109$, yani $(x + y)(x - y) = 109$ eşitliği elde edilir. 109 asal olduğundan $x + y = 109$ ve $x - y = 1$ eşitlikleri, buradan da $x = 55$, $y = 54$ ve $n = 2974$ bulunur. ♠