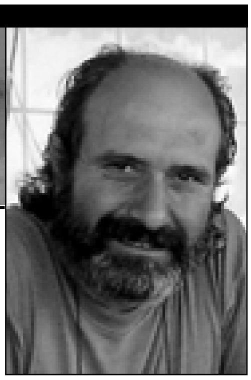
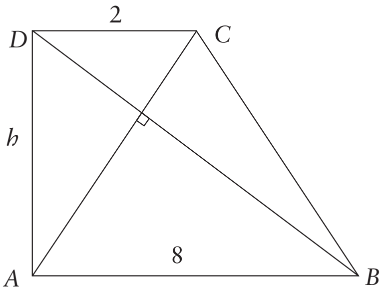


Ahmet Doğan
ahmetdogan51@hotmail.com

Bir Soru, Beş Çözüm, Bir Yorum ya da Hekareeşittirace Teoremi

Soru: *Taban uzunlukları 2 ve 8 olan ve köşegenleri dik kesişen dik yamuğun yüksekliği kaçtır?*

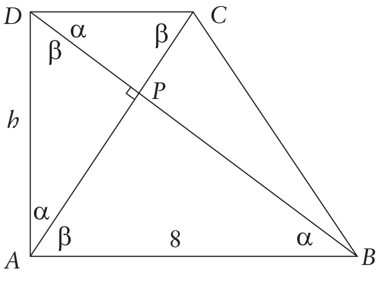
Çözümler: Önce sorudaki koşullara uygun bir yamuk çizip verileri yanına koyalım.



$AC \perp DB$
$DC \perp AD$
$DA \perp AB$
$|DC| = 2$
$|AB| = 8$
$|AD| = h = ?$

2 ve 8 uzunluğundaki kenarlar şekilde doğru orantıda değiller. Teknik resim dersinde olmadığımızdan bu pek önemli olmayacak bizim için.

Çözüm 1. Şeklimizde altı tane dik üçgen var. Bundan yararlanmalıyız elbette. "İç içe dik üçgenlerin verildiği şekillerde eş açılar, dolayısıyla ben-



zer üçgenler vardır" öngörüsü ve umuduyla şekle bakıldığında, *PDC*, *PBA*, *DAC* ve *ABD* dik üçgenlerinin birbirlerine benzer oldukları görülecektir.

* MEF Dersaneleri matematik öğretmeni.

Bu dört benzer üçgen ikişer ikişer ele alınarak, tam $\binom{4}{2}$, yani altı farklı üçgen benzerliği yazılabilir. Biraz fazla... Kenarları bilinenler ve istenen uzunluğu göz önünde bulundurarak *DAC* ve *ABD* benzer üçgenlerini seçelim. $DAC \approx ABD$ benzerliğinden,

$$\frac{DC}{DA} = \frac{AD}{AB}$$

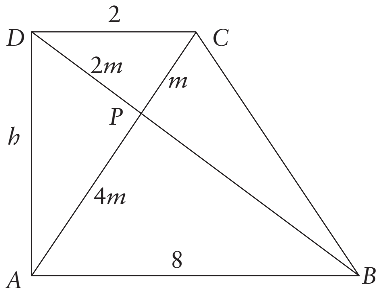
eşitliğini elde ederiz. Yani $2/h = h/8$. Bundan da $h^2 = 16$ çıkar. Demek ki $h = 4$.

Çözüm 2. $PDC \approx PBA$ üçgen benzerliğini görerek ve *DAC* dik üçgeninde ($DP \perp AC$ olduğundan) Öklid bağıntısını kullanabileceğimizi umarak, bulduklarımızı yazalım.

a) $|PC| = m$ olsun. $PDC \approx PBA$ benzerliğinden,

$$\frac{m}{|PA|} = \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|DC|}{|BA|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

eşitliklerini, bundan da $|PA| = 4m$ elde ederiz.



b) Yukarda bulduğumuz eşitliği ve *DAC* diküçgeninde Birinci Öklid Bağıntısını kullanarak, $|DP|^2 = |PA|\,|PC| = 4m^2$ buluruz. Bundan da $|DP| = 2m$ çıkar.

c) *PDA* ve *PDC* dik üçgenlerine Pisagor teoremini uygulayalım. Sırasıyla,

$$h^2 = (2m)^2 + (4m)^2 = 20m^2$$

ve

$$2^2 = m^2 + (2m)^2 = 5m^2$$

buluruz. İkincisini 4'le çarparak $20m^2 = 16$, ve bunu birincisiyle eşleştirerek $h^2 = 16$ buluruz. Yani $h = 4$.

Çözüm 3. Bir önceki çözümde olduğu gibi $PDC \approx PBA$ üçgen benzerliğini görerek ve İkinci Öklid Bağıntısının (Bir dik üçgende, bir dik kenarın karesi, hipotenüs üzerindeki izdüşümüyle hipotenüs uzunluğunun çarpımına eşittir) ADC üçgeninde kullanılabileceği öngörüsü ve umuduyla hesaplara geçiyoruz:

a) Aynen yukardaki gibi başlayacağız: $|PC| = m$ olsun. $PDC \approx PBA$ üçgen benzerliğinden

$$\frac{m}{|PA|} = \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|DC|}{|BA|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

elde ederiz. Yani $|PA| = 4m$.

b) ADC dik üçgenine İkinci Öklid Bağıntısını her iki dik kenara da uygulayarak,

$$h^2 = (4m)(5m) = 20m^2$$

ve

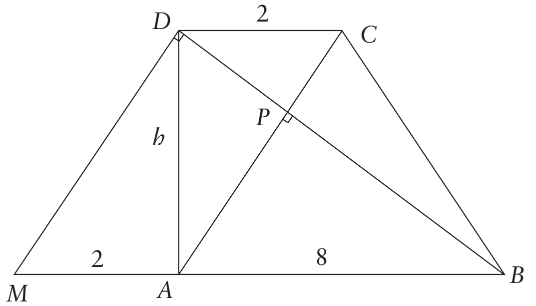
$$2^2 = m(5m) = 5m^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Bunlardan da kolaylıkla (aynen yukardaki gibi) $h = 4$ çıkar.

Çözüm 4. Burada bir yaratıcılık söz konusu olacak... AC ve DB kenarlarının dik kesişme özelliğini, şekildeki gibi, bir DM paraleliyle D köşesine taşıyabiliriz. Şimdi DMB dik üçgenine Birinci Öklid Bağıntısını uygulayalım:

$$h^2 = |DA|^2 = |MA| \times |AB| = 2 \times 8 = 16$$

buluruz, yani $h = 4$.



Çözüm 5. Köşegenleri dik kesişen bir dik yamukta, "yüksekliğin karesi taban uzunluklarının çarpımına eşittir" özelliğinden

$$h^2 = 2 \times 8 = 16$$

bulunur. Bundan da $h = 4$ çıkar.

Çözümler Üzerine Yorum. İlk üç çözüm (ki bunlara benzer başka çözümler de bulunabilir) benzerlik kavramı ve bağıntılarıyla kanıtlanabilen Öklid bağıntılarına dayanmaktadır. Benzerlik ve Öklid bağıntıları lise matematiği için öğrenilmesi zorunlu temel bağıntılardandır. Benzerlik konusunun, lise müfredatında bulunan çokgenler, çember, daire, uzay geometrisi, analitik geometri gibi matematiğin çok temel konularında kullanılacağı düşünüldüğünde, Öklid bağıntılarının önemi açıktır.

Dördüncü çözümde bir yardımcı doğru çizerek soruyu daha bildik bir hale getirmenin hoşluğu ve güzelliği vardır.

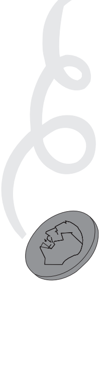
Beşinci çözüme gelince... Beşinci çözüm, daha önceki dört çözümün herbirinin sonucu olan bir özelliğe dayanmaktadır. Bu son çözüm, özel bir dörtgenin (yamuğun), özel bir yamuğun (dik yamuğun), özel bir durumunun (köşegenleri dik kesişen yamuğun) yüksekliğiyle tabanları arasındaki ilişkiyi ezbere bilmeye dayanmaktadır. Daha da kötüsü, böyle bir şekli gören öğrencilerin birçoğu, dörtgen, *MNPR* dörtgeni olarak verilse bile, hemen, "Hocam, bu soruda $h^2 = ac$ var!" diye atılmaktadır.

Elbette amacım Hekareeşittirace Teoremi'ni ezberleyen öğrencileri suçlamak değil. Amacım, bu ve benzeri birçok bağıntıyı ezberleten, ve böylece öğrenciyi matematikten soğutan ve korkutan sözümona kaynakları eleştirmek. Ne yazık ki, Üniversiteye Hazırlık adı altında yazılan birçok kitapta bu tür bir eğilim vardır. Öğrenciler bu nedenle matematiği ezberlemeye yönelmektedir. Yine ne yazık ki birçok öğretmen arkadaşımız da bu anlayışla geometri öğretmeye çalışmaktadır.

Hiçbir aklı başında matematikçinin, bir öğrenciye, "bakalım $h^2 = ac$ bağıntısını ezberlemiş mi?" düşüncesiyle bir soru soracağımı sanmıyorum.

Matematiği ezberlenecek formül yığınına dönüştüren, öğrenciyi düşünmekten ve üretmekten alıkoyan, yaratıclığı geliştirmeyen, öğrenciyi en hafif deyimiyle "anlamaz" yerine koyan anlayış hem matematiğe hem de öğrenciye saygısızlık değil midir? ♠

Yazı Tura



Yazı tura atıyorsunuz. Yazı gelirse 1 puan alıyorsunuz, tura gelirse 2 puan. Ve puanlarınızı topluyorsunuz. Toplamın bir zaman sonra n olma olasılığı kaçtır? (Lineer cebir gerekebilir.) n sonsuza gittiğinde, bu olasılıklar bir sayıya yakınsar mı? Yakınsarsa kaça yakınsar? Bir başka deyişle, n çok çok büyük olduğunda, toplamın bir zaman sonra n olma olasılığını aşağı yukarı bulabilir misiniz? (Analiz gerekebilir.) ♠