Topoloji Köşesi

Burak Özbağcı
bozbagci@ku.edu.tr

Bir Milyon Dolarlık Soru

Henri Poincaré
(1854-1912)

Clay Matematik Enstitüsü (http://www.claymath.org/) matematiğe olan ilgiyi artırmak amacıyla, bu milenyumun başında yedi matematik problemini seçerek, bu sorulardan herhangi birini çözene tam bir milyon dolar ödül vereceğini duyurdu. Bu sorulardan biri, topoloji alanında son yüzyılın tartışmasız en ilginç sorusu olan Poincaré sanısıdır. Bu sanının ne olduğunu olabildiğince az teknik terim kullanarak ifade etmeye çalışacağım.

Bir portakalın etrafına geçirilmiş bir lastik düşünelim. Bu lastiği koparmadan ve portakalın yüzeyinden ayrılmasına izin vermeden portakalın üzerinde herhangi bir noktaya doğru büzülmesini sağlayabiliriz. Ama aynı lastiğin bir simitin üzerine simiti bir kere saracak ve ortasındaki delikten bir kere geçecek şekilde geçirildiğini düşünelim. Bu durumda bu lastiği koparmadan veya simiti bölmeden yüzey üzerindeki bir noktaya büzmek mümkün değildir.

Demek ki bir portakalın yüzeyi bir simitin yüzeyi "topolojik" olarak aynı değildir. Bu özellik, iki boyutlu bir küreyi (portakalın yüzeyini) diğer yüzeylerden ayıran bir özelliktir. Yani, bu özellik küreyi "topolojik olarak" belirler.

Şimdi üç boyutlu bir küre düşünelim. ***Üç boyutlu küre***, dört boyutlu Öklid uzayında merkeze olan uzaklığı birim olan noktalar kümesi olarak tanımlanır, yani $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$ olarak. Bunu, iki boyutlu kürenin tanımının genelleştirilmesi olarak algılayabilirsiniz.

Poincaré nerdeyse bir yüzyıl önce şu soruyu sordu: İki boyutlu küreyi diğer yüzeylerden ayıran lastiğin bir noktaya büzülebilme özelliği, acaba üç boyutlu küreyi de diğer üç boyutlu uzaylardan ayıran bir özellik midir? Yani eğer üç boyutlu bir "manifold" üstünde gerilmiş olan herhangi bir lastik koparılmadan bir noktaya büzülebiliyorsa, bu uzay üç boyutlu kürenin "topolojik bir kopyası" mıdır?

İlk akla gelen yanıt: Elbette öyledir. Bir yüzyıldır bu soruyu kimse yanıtlayamamıştır. Bu satırların yazıldığı sırada Poincaré Sanısı hâlâ bir çözüme kavuşmamıştır, yani 1 milyon dolar daha sahibini bulamamıştır. ♠

Poincaré Sanısı $n \neq 3$ ise tüm n boyutlu çokkatlılar (manifold) için kanıtlanmıştır. 1960'ta Smale $n > 7$ için, 1961'de Zeeman $n = 5$, 1962'de Stallings $n = 6$ için kanıtlamıştır. Stephen Smale kanıtını daha sonra $n \geq 5$ için genelleştirmiştir. Yirmi yıl sonra, 1982'de M. Friedman çok değişik yöntemlerle daha genel bir teorem kanıtlayarak Poincaré sanısını $n = 4$ için kanıtlamıştır. Dunwoody, Nisan 2002'de sanıyı kanıtladığını duyurmuşsa da, makalesinde daha sonra hata bulunmuştur. Şimdi bir kanıtlama yöntemi öngören bir makalesini matematikçilere sunmuş (http://www.maths.soton.ac.uk/pure/viewabstract.phtml?entry=655). Kısa bir süre önce de S. Nikitin sanıyı kanıtladığını matematik dünyasına duyurdu (http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0210/0210334v1.pdf). Hakemler makaleyi okuyup düşüncelerini belirtecekler. Heyecanla bekliyoruz.

* Koç Üniversitesi
Matematik Bölümü öğretim üyesi.