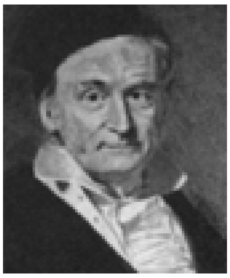
Çekmece ya da Güvercin Yuvası İlkesi

Haluk Oral* / *oralh@boun.edu.tr*

Bir sihirbaz sahnede yaptığı numarayla küçük dilinizi yutturabilir ama nasıl yaptığını öğrendiğinizde numaranın bütün havası kaybolur. Numaranın gerçekten sihirbazlık olmadığını anlarsınız! Bu bir düşkırıklığı yaratır. Onun için sihirbazlar numaralarını nasıl yaptıklarını açıklamazlar. Nedendir bilinmez insanoğlu sihirbazlığı bilime yeğler, sihirbazlığı daha eğlenceli bulur.

Matematikte de ilk bakışta zor görünen bazı problemlerin çözümü çok basit olabilir, şaşırtıcı derecede basit bir matematiksel ilkeye dayanabilir. Matematikçilerin sırlarını paylaşmaması (en azından günümüzde) söz konusu olmadığından bu ilkelerden birini açıklayacağız: *Çekmece İlkesi*, namı diğer *Güvercin Yuvası İlkesi.*

İlke gerçekten çok basit. Ama önce numaramızı yapalım:



Küçük Gauss babasıyla ormanda gezerken sormuş:

– Bu ormanda yaprak sayısı aynı olan iki ağacın olması için herhangi bir koşul söyleyebilir misin?

Baba Gauss böyle bir koşul düşünemeyince yanıtı küçük Karl vermiş:

– Eğer ormandaki yapraklı ağaç sayısı, bu ormanın en çok yaprağı olan ağacın yaprak sayısından daha fazlaysa, en az iki ağacın yaprak sayısı aynıdır...

Bu öykü büyük bir olasılıkla uydurmadır. Ama küçük Gauss'un büyüdüğünde dünyanın gelmiş geçmiş en büyük matematikçisi olacağı gerçektir.

Gauss'un yanıtı karışık gibi görünebilir ilk bakışta. Ama çok kolay olduğunu şu açıklamayı okuyunca fark edeceksiniz: Güvercin beslediğinizi düşünelim, her akşam da güvercinler yuvalarına girsinler. Eğer güvercin sayısı güvercin yuvası sayısından fazlaysa, örneğin 4 yuva ve 5 güvercin varsa, en az bir yuvada birden fazla güvercin vardır. İlkeye Güvercin Yuvası adı verilmesinin nedeni bu açıklamadır.

Bu ilke değişik ama denk ifadelerle de verilebilir. Örneğin,

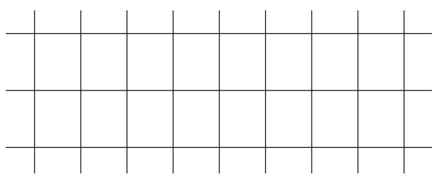
1. Belli sayıda güvercin aynı sayıda yuvaya yerleştirildiğinde yuvalardan birinin boş kalması için gerek ve yeter koşul, en az bir yuvada birden fazla güvercin olmasıdır.
2. Eğer belli sayıda güvercin belli sayıda yuvaya hiçbir yuvaya birden fazla güvercin koymadan yerleştirilebiliyorsa, o zaman güvercin sayısı yuva sayısından küçük veya eşittir.
3. İki sonlu küme arasında birebir eşleme olması için gerek ve yeter koşul, bu iki kümenin eleman sayısının eşit olmasıdır.

Ormana ve ağaçlara dönelim. Ne demişti Gauss? Ormandaki yapraklı ağaç sayısı en fazla yaprağı olan ağacın yaprak sayısından fazlaysa... Ormanda 5 ağaç olsun ve her ağaç en fazla 4 yapraklı olsun. İlk dört ağacın yaprak sayıları 1, 2, 3, 4 olarak farklı olabilir. Ama sona kalan ağacın yaprak sayısı bu sayılardan birine eşit olmak zorunda kalacaktır.

Şimdi üç örnek problem ve bu problemlerin çözümlerini verelim.

Örnek 1. *Bir düzlemin bütün noktaları iki renkle boyanırsa, dört köşesi de aynı renkte olan bir dikdörtgen vardır.*

Çözüm: Üç yatay ve dokuz dikey doğru çizelim. Üç nokta iki renge 2^3, yani 8 değişik şekilde boyanabileceğinden dikey doğruların en az ikisinin üç yatay doğru ile kesişimi aynı şekilde renklendirilmiş olmalıdır. Üç noktadan en az ikisi aynı renk olacağından aranan dikdörtgeni buluruz.

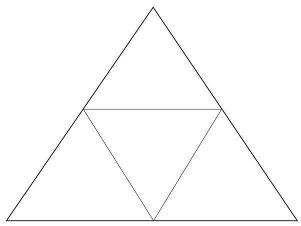


Örnek 2. *Kenar uzunluğu* 2 *olan bir eşkenar üçgenin içinde alınan beş noktadan en az ikisi arasındaki uzaklığın* 1'*den küçük veya eşit olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Üçgenin üç kenarının orta noktaları-

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

nı birleştirelim. Böylece üçgeni kenar uzunlukları 1 olan dört eşkenar üçgene ayırmış oluruz. Bu üçgenin içinde beş nokta alırsak en az ikisini aynı küçük üçgenden almak zorunda kalırız. Ve kanıtımız tamamlanmış olur.



Polinom

$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ biçiminde yazılan bir ifadeye **polinom** denir. $a_0, a_1, ..., a_n$ sayıları bu polinomun **katsayı**larıdır. Örneğin, $-2 + 3x^2 + 7x^3$, katsayıları tamsayı olan bir polinomdur. $\pi + \sqrt{2}x$ katsayıları gerçel sayılardan oluşan bir başka polinomdur. Ama $\sqrt{x}$ bir polinom değildir. $1/x$ de bir polinom değildir. $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$ gibi sonsuz ifadeler de polinom değildirler.

Bu sorunun aşağıdaki genellenmiş halinin kanıtlanmasını size bırakıyoruz.

Örnek 3. *$f(x)$, katsayıları tamsayı olan bir polinom olsun. Eğer $f(x) = 2$ eşitliğini sağlayan üç tamsayı varsa, $f(x) = 3$ eşitliğini sağlayan bir tamsayı olmadığını kanıtlayın.*

Çözüm: Önce, p ve q sayıları ne olursa olsun, $p - q$ sayısının $f(p) - f(q)$'yü böldüğünü gözlemleyin[1]. Şimdi $f(a) = f(b) = f(c) = 2$ ve $f(d) = 3$ olsun. Bu durumda,

$$(d - a) \mid (f(d) - f(a)) = 3 - 2 = 1$$
$$(d - b) \mid (f(d) - f(b)) = 3 - 2 = 1$$
$$(d - c) \mid (f(d) - f(c)) = 3 - 2 = 1$$

olduğundan[2], $d - a$, $d - b$ ve $d - c$ sayıları ya 1'e ya da –1'e eşit olmalıdır. Güvercin yuvası ilkesine göre bu üç sayıdan en az ikisi birbirine eşit olmalı. Bundan da a, b ve c sayılarından en az ikisinin eşit olması gerektiği çıkar. Böylece kanıtımız tamamlanmıştır.

Sorular

1. $n + 1$ tamsayı arasında, farkları n'ye tam olarak bölünen en az iki sayı vardır.
2. Bir düzlem üzerindeki 25 noktanın herhangi üçü arasındaki minimum uzaklık 1'den az olsun. Bu noktaların en az 13'ünü içine alan 1 yarıçaplı bir çemberin varolduğunu gösteriniz.
3. n ve k pozitif iki tamsayı olsun. n'nin k ile bölündüğünde aynı kalanı veren en az iki kuvveti olduğunu gösteriniz.
4. 7'nin 0001 ile biten bir kuvveti olduğunu gösteriniz.
5. Yarıçapı 1 olan bir çemberin içinde alınan 6 noktadan en az ikisi arasındaki uzaklığın 1'den küçük veya eşit olacağını gösteriniz.
6. Otuz günde her gün en az bir hap içmek koşuluyla 45 hap içen bir hastanın, içtiği hap sayısının toplam 14 olduğu ardışık bir günler dizisi olduğunu gösterin. ♠

[1] İpucu: n bir doğal sayıysa, $p - q$ sayısı $p^n - q^n$ sayısını böler.

[2] $u|v$ ifadesi "u sayısı v'yi böler" anlamına gelmektedir.

Bir Sihirbazlık

Yöntemin gücünü daha iyi göstermek için bir başka teorem kanıtlayalım. Buram buram sihirbazlık kokan bir teorem... 1'le 50 arasından herhangi on sayı seçin. Şimdi çok iddialı bir şey söyleyeceğiz: Bu on sayı arasından, toplamları birbirine eşit olan iki tane beş sayılık küme bulabilirsiniz. Örneğin, diyelim,

$$\{2, 5, 24, 26, 27, 30, 33, 34, 42, 50\}$$

sayılarını seçtiniz. Aşağıdaki beş öğeli altkümelere bakalım:

$$\{2, 24, 27, 33, 42\} \text{ ve } \{5, 26, 30, 33, 34\}.$$

Bu iki kümenin sayılarının toplamları birbirine eşittir. İnanmazsanız toplayın.

İsterseniz başka on sayı seçin. Biraz denerseniz – ne sihirdir ne keramet – seçtiğiniz on sayı arasından, toplamları eşit olan iki tane beş elemanlı küme bulabilirsiniz.

Bu savı kanıtlayalım. A, on sayılık kümemiz olsun. A'nın kaç tane beş öğeli altkümesi vardır?

$$\binom{10}{5} = 252$$

tane vardır. Bu sayıyı aklımızda tutalım, birazdan gerekecek. Her beş öğelik altkümenin sayılarının toplamı en az

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

olabilir, en çok da

$$46 + 47 + 48 + 49 + 50 = 240.$$

Toplamların 15'le 240 arasında değiştiğini bulduk. 15'le 240 arasında

$$240 - 15 + 1 = 226$$

sayı vardır. Bu sayı da önemli olacak, aklımızda tutalım.

Demek ki, 252 tane beş öğelik altkümenin sayılarının toplamı (15'le 240 arasındaki) 226 sayıdan biri olmalı. 252, 226'dan daha büyük olduğundan, güvercin yuvası ilkesine göre, bu 252 altkümeden en az ikisi aynı toplamı vermeli. Teoremimiz kanıtlanmıştır. ♠