Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Fonksiyonlarda Bir Uzaklık Kavramı

Sym($\mathbb{N}$)'nin (12)(34)(56)(78)... elemanı (12), (34), (56), (78), ... elemanlarının bileşkesi (ya da çarpımı) değildir. Sym($\mathbb{N}$)'de sonlu tane elemanın bileşkesini almasını öğrendik, sonsuz tane elemanı nasıl çarpacağımızı bilmiyoruz. Bu yazıda, yukardaki (12)(34)(56)(78)... elemanını,

(12)
(12)(34)
(12)(34)(56)
(12)(34)(56)(78)
...

dizisinin "limiti" olarak görmesini öğreneceğiz, yani bir anlamda, kimi zaman sonsuz tane elemanı çarpmasını öğreneceğiz. Bunun için Sym($\mathbb{N}$)'de bir "uzaklık" kavramı tanımlamamız gerekecek.

A herhangi bir küme olsun. $F(\mathbb{N}, A)$, $\mathbb{N}$'den A kümesine giden fonksiyonlar kümesini simgelesin. X de $F(\mathbb{N}, A)$'nın herhangi bir altkümesi olsun. $X = F(\mathbb{N}, A)$ olabilir. Ya da $A = \mathbb{N}$ ise, $X = \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ olabilir.

X'ten herhangi iki eleman alalım, f ve g. Şimdi f ve g arasındaki "uzaklığı" bir gerçel sayı olarak tanımlayacağım. Bu sayıya $d(f, g)$ adını vereceğim. Tanımlayacağım $d(f, g)$ uzaklığı negatif olmayan bir gerçel sayı olacak, ve bir anlamda f ve g'nin birbirlerine ne derece benzediklerini ölçecek. Fonksiyonlar ne kadar birbirine "benziyorlarsa", fonksiyonların birbirine "uzaklıkları" o kadar küçük olacak.

Eğer $f = g$ ise, f ve g arasındaki uzaklık 0 olsun, yani $d(f, g) = 0$ olsun.

Eğer $f \neq g$ ise, aşağıdaki koşulları sağlayan n doğal sayısını bulalım (vardır öyle bir sayı):

$$f(0) = g(0),\ f(1) = g(1),\ \ldots,\ f(n-1) = g(n-1),\ f(n) \neq g(n).$$

Yani n, $f(n) \neq g(n)$ eşitsizliğini sağlayan en küçük doğal sayı olsun. Şimdi f ve g arasındaki uzaklığı, yani $d(f, g)$ sayısını, $1/2^n$ olarak tanımlayalım.

Özetleyin,

$$d(f,g) = \begin{cases} 1/2^n & \text{eğer } n,\ f(n)\neq g(n) \text{ eşitliğini sağlayan ilk sayıysa} \\ 0 & \text{eğer } f = g \text{ ise} \end{cases}$$

Bu tanıma göre, eğer $f(0) \neq g(0)$ ise f ile g arasındaki uzaklık 1'dir. Bu uzaklık, iki fonksiyon arasında olabilecek en büyük uzaklıktır.

Eğer $f(0) = g(0)$ ise, ama $f(1) \neq g(1)$ ise, f ve g arasındaki uzaklık 1/2'dir.

Eğer $f(0) = g(0)$ ve $f(1) = g(1)$ ise, ama $f(2) \neq g(2)$ ise, f ve g arasındaki uzaklık 1/4'tür.

Yukarda tanımladığımız uzaklık fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar: Her $f, g, h \in X$ için,

U1. $d(f, g) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ ve $d(f, g) = 0$ ancak ve ancak $f = g$ ise.
U2. $d(f, g) = d(g, f)$.
U3. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

Matematikte (bir X kümesi üzerine) ***uzaklık*** denilen kavram işte ($X \times X$'ten $\mathbb{R}$'ye giden ve) yukardaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur.

Uzaklık kavramının yardımıyla "yakınsamak" kavramı tanımlanır. $(f_n)_n$, X kümesinden bir dizi olsun (yani her f_n fonksiyonu X'in bir elemanı). Bir de ayrıca bir $f \in X$ verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, "$n > N \Rightarrow d(f_n, f) < \varepsilon$" koşulunu sağlayan bir N sayısı varsa, "$(f_n)_n$ dizisi f'ye ***yakınsar***" denir ve bu, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ olarak yazılır[1].

Aslında bizim ilgilendiğimiz kümede yakınsamak kavramı çok daha kolay bir biçimde ifade edilebilir: Eğer her $x \in A$ için, $n > N$ olduğunda $f_n(x) = f(x)$ eşitliğinin sağlandığı bir N sayısı varsa, o zaman $(f_n)_n$ dizisi f'ye yakınsar ve bunun tersi de doğrudur. Bu ikinci tanımın birincisine göre şu üstünlüğü vardır: Uzaklık kavramını kullanmaz ve böylece yakınsamak tanımını başka fonksiyon kümelerine genelleştirmemize olanak sağlar.

Aşağıdaki örneklerde hep $A = \mathbb{N}$ alacağız, yani $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden fonksiyonlara bakacağız.

Örnek 1. Şu eşleşmeleri ele alalım: $f_0 = (0\ 1)$, $f_1 = (0\ 1)(2\ 3)$, $f_2 = (0\ 1)(2\ 3)(4\ 5)$,... Yani

$$f_n = (0\ 1)(2\ 3)\ \ldots\ (2n,\ 2n+1)$$

olsun. O zaman f_n dizisinin (yukardaki anlamda) bir limiti vardır, ve bu limit, tahmin edileceği üzere,

$$(0\ 1)(2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)\ldots$$

eşleşmesidir. Demek ki eşleşmelerin limiti gene bir eşleşme olabiliyormuş. Ama her zaman değil:

1- Bu N sayısı ε'a bağımlıdır. ε küçüldükçe N büyümek zorundadır. Bu yüzden kimileyin N yerine N_ε yazılır.

Örnek 2. $f_1 = (0\ 1)$, $f_2 = (0\ 1\ 2)$, $f_3 = (0\ 1\ 2\ 3)$,... olsun, yani, genel olarak $f_n = (0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$ olsun. O zaman f_n dizisinin (yukardaki anlamda) bir limiti vardır, ve bu limit – tahmin edileceği üzere - $(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ \ldots)$ fonksiyonudur. Yukardaki örneğin tersine, bu kez bulduğumuz bir eşleşme değil (limit birebir ama örten değil, 0'a giden bir eleman yok.)

Örnek 3. $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonları şöyle tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \text{ ise} \\ x - n & \text{eğer } x \geq n \text{ ise} \end{cases}$$

Her f_n örten bir fonksiyondur (ama birebir değiller). f_n örten fonksiyonların limiti, hep 0 değeri veren sabit sıfır fonksiyonudur. Demek ki örten fonksiyonların limiti örten olmayabiliyor...

Soru: Birebir fonksiyonlardan oluşan bir dizinin limiti birebir olmak zorunda mıdır?

Şimdi A'dan $\mathbb{R}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi $F(A, \mathbb{R})$ bakalım. Bu kümeden bir $(f_n)_n$ dizisi alalım. Her $x \in A$ için, $(f_n(x))_n$ gerçel sayılar dizisinin bir limiti olduğunu varsayalım. Bu limite $f(x)$ adını verelim:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Demek ki $f \in F(A, \mathbb{R})$. Bu durumda f_n fonksiyonlarının (noktasal) limitinin f olduğunu söyleyeceğiz ve bunu

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f$$

olarak göstereceğiz. Demek ki

$\lim_{n \to \infty} f_n = f \iff$

Her $x \in A$ için, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Eğer f_n fonksiyonlarının değerleri $\mathbb{N}$'deyse (yani her $f_n \in F(A, \mathbb{N})$ ise), aynen yukarda ilk verdiğimiz tanımı elde ederiz.

$F(A, \mathbb{R})$ kümesinin özel bir altkümesinde çok daha ilginç bir uzaklık kavramı tanımlanabilir. Önce o özel altkümeyi tanımlayayım: $F_b(A, \mathbb{R})$ şu küme olsun:

$F_b(A, \mathbb{R}) = \{f \in F(A, \mathbb{R}) : \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty\}$.

Şimdi $f, g \in F_b(A, \mathbb{R})$ için şu tanımı verelim: $d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$. d fonksiyonu yukardaki U1, U2, U3 özelliklerini sağlar, yani d, $F_b(A, \mathbb{R})$ üzerine bir uzaklıktır. Bu uzaklık kavramını kullanarak $F_b(A, \mathbb{R})$ kümesinde, yukardaki tanımdan çok daha güçlü bir yakınsama tanımlayabiliriz. Bu kavrama göre,

$\lim_{n \to \infty} f_n = f \iff$ Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N vardır ki, eğer $n > N$ ise $d(f_n, f) < \varepsilon$. ♠