Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Sym (ℕ)

Doğal sayılar kümesi ℕ'nin eşleşmeleri Sym(ℕ) olarak gösterilir. S_n için söylediklerimizin hemen hemen hepsi Sym(ℕ) için de geçerlidir.

Örnek 1. ℕ'den ℕ'ye giden aşağıda tanımlanan f fonksiyonuna bakalım:

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{eğer } n \text{ tekse} \\ n+1 & \text{eğer } n \text{ çiftse} \end{cases}$$

Bu bir eşleşmedir. f''yi devirlerine ayırıp şöyle yazabiliriz: $f = (0\ 1)(2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)$... Elbette

$$f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$$

eşitliği geçerlidir.

Burada (0 1), (2 3), (4 5) gibi sonsuz tane eşlemenin bileşkesinin alınmadığına dikkatinizi çekeriz. (0 1)(2 3)(4 5)(6 7) .... eşleşmesi sonsuz tane eşlemenin bileşkesi değil, tek bir eşleşmedir.

Örnek 2. $g = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$... fonksiyonu da Sym(ℕ)'nin bir elemanıdır. Bu fonksiyon 0'ı sabitler, 1'i 2'ye, 2'yi 1'e gönderir... Bu fonksiyonun da karesi birim fonksiyondur.

Örnek 3. Yukardaki eşleşmelerin bileşimlerini alıp yeni eşleşmeler elde edebiliriz:

$$f \circ g = ((0\ 1)(2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)\ ...)((1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\ ...) = (\ ...\ 8\ 6\ 4\ 2\ 0\ 1\ 3\ 5\ 7\ ...)$$
$$g \circ f = ((1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)\ ...)((0\ 1)(2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)\ ...) = (\ ...\ 7\ 5\ 3\ 1\ 0\ 2\ 4\ 6\ 8\ ...)$$

Bu örneklerde de görüldüğü üzere Sym(ℕ)'deki devirlerin başlangıcı olmayabilir.

Örnek 4. (0 1) deviri Sym(ℕ)'nin bir elemanıdır. Bu eşleşme 0'ı 1'e, 1'i 0'a götürür, geri kalan sayıları değiştirmez.

Örnek 5. Sym(ℕ)'de bir devirin başlangıcı varsa, o zaman o devir sonlu olmak zorundadır. Örneğin, (0 1 2 3 4 ...) sonsuz deviri Sym(ℕ)'nin bir elemanı değildir. Çünkü 0'a giden bir sayı yoktur. Sonsuz devirlerin ne başlangıcı ne de sonu olabilir.

Örnek 6. Sym(ℕ)'nin derecesi 2 olan elemanları belli (sonlu ya da sonsuz sayıda) ayrık ikilik devirlerin yanyana getirilmesiyle elde edilir.

Örnek 7. Üçüncü örnekteki $f \circ g$ eşleşmesinin karesini alabiliriz:

$$(\ ...\ 8\ 6\ 4\ 2\ 0\ 1\ 3\ 5\ 7\ ...)^2 =$$
$$(\ ...\ 10\ 6\ 2\ 1\ 5\ 9\ ...\ )(\ ...\ 12\ 8\ 4\ 0\ 3\ 7\ 11\ ...\ )$$

S_n'nin (1 2) elemanı S_n'de bir başka elemanın karesi olmadığı gibi, S_n'deki elemanların karelerinin çarpımı da olamaz. Bu, kanıtı pek kolay olmayan, bilinen bir olgudur.

Soru 1. $\{f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) : f \circ (1\ 2) = (1\ 2) \circ f\}$ kümesini bulun.

Soru 2. (1 2) elemanının Sym(ℕ)'den bir elemanın karesi olamayacağını kanıtlayın.

Soru 3. (1 2) elemanının Sym(ℕ)'de sonlu sayıda karenin çarpımı olduğunu kanıtlayın.

Soru 4 ve 5. Yukardaki soruları üçüncü örnekteki $f \circ g$ eşlemesi için yanıtlayın.

Soru 6. Sym(ℕ)'deki her eleman sonlu sayıda karenin çarpımı mıdır?

Soru 7. p bir asal sayı olsun. Sym(ℕ)'deki her eleman sonlu sayıda elemanın $p$inci gücü olarak yazılabilir mi? ♠