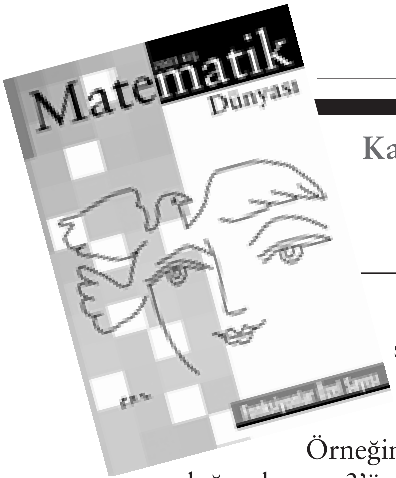

Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Parçalanış Sayısı

Bir doğal sayının doğal sayıların toplamı olarak yazılış sayısına o sayının ***parçalanış sayısı*** denir. Örneğin 3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1 olduğundan, ve 3'ün başka parçalanışı olmadığından, 3'ün parçalanış sayısı 3'tür. n'nin parçalanış sayısı $p(n)$ olarak gösterilir.

$p(n)$ sayısı üzerine ilk düşünen matematikçi Leibniz'tir (1669). O zamandan bu zamana $p(n)$'nin "kapalı" bir formülü bulunamamıştır[1].

Formülünü bulamasa da, İsviçreli büyük matematikçi Euler bu sayının hesaplanması için kolay bir yöntem bulmuştur (1740). Bu yöntemi açıklayacağız şimdi.

Polinom olmayan, ama polinımlara benzeyen şu seriyi alalım:

$$\alpha(t) := 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots.$$

Burada t yerine t^k alırsak,

$$\alpha(t^k) = 1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \ldots.$$

elde ederiz. Şimdi bu serileri k = 1, 2, 3,... için çarpalım:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \ldots)$$

Sonsuz tane seriyi çarpmanın kolay olmadığını söyleyebilirsiniz. Kolay değildir belki ama çok zor da değildir. Örneğin bu sonsuz çarpımda 1, t, t^2, t^3, t^4 ve t^5'in katsayısını hesaplamak için, $k \geq 6$ için sağ taraftaki tüm t^k'ları yok sayabiliriz (attıklarımızın, örneğin, t^5'in katsayısına etkisi yoktur.) Ve çarpma yaparken de, $k \geq 6$ için sağ taraftaki tüm t^k'ları yok sayıp aşağıdaki gibi "modulo t^6" hesaplayabiliriz:

$$(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5)(1+t^2+t^4)(1+t^3)(1+t^4)(1+t^5)$$
$$\equiv (1+t+t^2+t^3+t^4+t^5)(1+t^2+t^4)(1+t^3+t^4+t^5)$$
$$\equiv (1+t+2t^2+2t^3+3t^4+3t^5)(1+t^3+t^4+t^5)$$
$$\equiv 1+t+2t^2+3t^3+5t^4+7t^5.$$

Bulduğumuz katsayılara dikkat ettiniz mi?

n	$p(n)$
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	11
7	15
8	22
9	30
10	42
11	56
12	77
13	101
14	135
15	176
50	204.226
100	190.569.292
150	40.853.235.313
200	3.972.999.029.388
250	230.793.554.364.681
300	9.253.082.936.723.602

Çarpmayı devam ettirelim:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \ldots) =$$

$$1+t+2t^2+3t^3+5t^4+7t^5+11t^6+15t^7+22t^8+30t^9+42t^{10}+56t^{11}+\ldots$$

Katsayıları gördünüz mü? Sabit terimi sıfırıncı katsayı olarak sayarsak, $k$inci katsayı $p(k)$. Şaşırtıcı bir biçimde,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)t^k$$

eşitliği geçerlidir. (Burada $p(0) = 1$ aldık.) Her ne kadar şaşırtıcıysa da, bunun kanıtı pek zor değildir. Bu eşitlik üzerine biraz düşünen okur eşitliğin nedenini kendi kendine bulur sanıyorum.

Gene de büyük k'lar için $p(k)$'yı hesaplamak çok kolay değildir. Bu yüzden k çok çok büyükken $p(k)$'nın aşağı yukarı kaç olduğunu, yani $p(k)$'nın "asemptotik davranışını" bilmek yararlıdır. 1918'de İngiliz matematikçisi Hardy ve Hint dahisi Ramanujan,

$$p(n) \approx \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}$$

formülünü bulmuşlardır. Bu formülün anlamı şudur: n çok çok büyük alınırsa, sağdaki ve soldaki terimlerin birbirine oranı 1'e çok çok yakındır, daha doğru bir deyişler, oranların limiti 1'dir.

Parçalanışlarla e ve π sayılarının ne ilişkisi var diye soruyorsanız, bilin ki ben de çok merak ediyorum.

Ramanujan bu konuda akıl almaz formüller bulmuştur. Üstelik kanıtlamadan... Kanıtları çok sonraları bulunmuştur. Ama bu sayının konusunun dışına çıkıyoruz. Bu olağanüstü matematikçiden bir başka sayıda söz ederiz. ♠

1- Kapalı bir formül olmayabilir de. Kapalı formül sayısı sayılabilir sonsuzluktadır. Oysa $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye sayılamaz sonsuzlukta fonksiyon vardır.