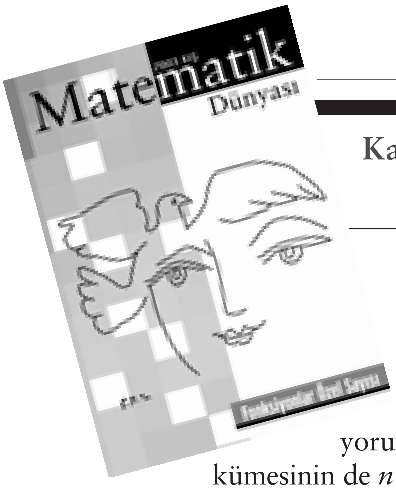
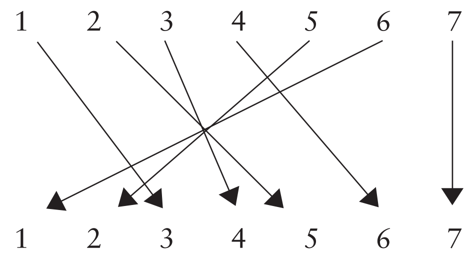


Kapak Konusu: Fonksiyonlar

S_n ya da namı diğer Sym(n)

1. S_n'nin Tanımı. n elemanlı bir kümenin $n!$ tane eşleşmesi[1] olduğunu biliyoruz. Demek ki $\{1, 2, ..., n\}$ kümesinin de $n!$ tane eşleşmesi vardır. Bu kümenin eşleşmelerinden oluşan küme Sym(n) ya da S_n olarak gösterilir. Yazması daha kolay diye biz S_n'yi tercih edeceğiz. Bu yazıda amacımız S_n kümesini incelemek.

2. Elemanlarının Yazılımı. Önce S_n kümesinin elemanlarını teker teker inceleyelim, sonra modern matematiğin gereği, kümeye bir bütün olarak bakarız.



Bir örnekle başlayalım. Yukarıdaki eşleşmeye bakalım. Bu eşleşme 1'i 3'e, 3'ü 4'e, 4'ü 6'ya, 6'yı da 1'e göndermiş. Yani

$$1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 1$$

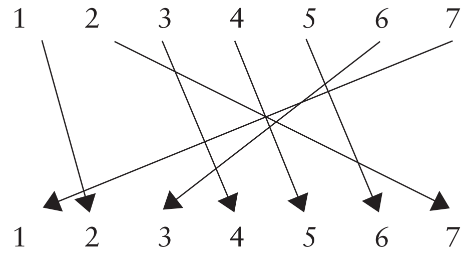
diye bir döngü olmuş. Aynı eşleşme 2'yi 5'e ve 5'i 2'ye yollamış. Demek ki bir de

$$2 \to 5 \to 2$$

diye bir döngü sözkonusu. Son olarak, bu eşleşme 7'yi 7'ye göndermiş. Yanda resmi görülen eşleşme (1346)(25)(7) olarak yazılır. Her bir paranteze ***devir*** adı verilir.

Örneğin S_7'nin (127)(3456) eşleşmesinin resmi aşağıdadır. Görüldüğü gibi, (127) deviri yüzünden, (ya da sayesinde) 1 sağındaki 2'ye, 2 sağındaki 7'ye, 7 de ta en baştaki 1'e gidiyor. Her sayı hemen kendi sağındaki sayıya gider. Sağında sayı olmayan sayılar, bulundukları parantezin en başına giderler. S_7'nin her elemanı (ki 7! = 5040 tane elemanı vardır) böyle ayrık devirler biçiminde yazılabilir.

Yalnız dikkat edilmesi gereken bir iki nokta var. Bu yazılımla, (127)(3456) ve (3456)(127) eş-



leşmeleri de birbirine eşittir. Aynı biçimde,

$$(127)(3456) = (271)(3456) = (3456)(271)$$
$$= (4563)(271) = (5634)(712)$$

gibi eşitlikler geçerlidir.

S_4'ün 4! yani 24 elemanını bu yazılımla yazabiliriz:

S_4'ün elemanları:
(1)(2)(3)(4)
(12)(3)(4), (13)(2)(4), (14)(2)(3), (23)(1)(4), (24)(1)(3), (34)(1)(2)
(123)(4), (132)(4), (124)(3), (142)(3), (134)(2), (143)(2), (234)(1), (243)(1)
(12)(34), (13)(24), (14)(23)
(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)

Yazılımı biraz daha sadeleştirebiliriz. Tek elemanlı devirleri yazmasak da olur. Örneğin (1346)(25)(7) yerine daha basit olarak (1346)(25) yazabiliriz. Bunun gibi (123)(45)(6)(7) yerine (123)(45) yazalım.

Ama o zaman (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) yerine ne yazacağız? Onun yerine de Id_7 yazalım. Eğer 7 umurumuzda değilse, Id_7 yerine sadece Id yazalım.

Bu daha basit yazılımla, S_4'ün 24 elemanı aşağıdaki gibi yazılır.

Id_4
(12), (13), (14), (23), (24), (34)
(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)
(12)(34), (13)(24), (14)(23)
(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)

Bu yazılımın bir tehlikesi var. O da şu: Bu yazılımla (1346)(25) elemanı S_6'nın da, S_7'nin de, S_8'in de elemanı olabilir. Nasıl anlayacağız hangisinin elemanı olduğunu? Konunun gelişinden... Biraz dikkat etmek gerekir sadece o kadar.

Bu yazılımın, tehlikesi yanında, bir avantajı vardır: Bu yazılım sayesinde, örneğin, S_6'yı rahatlıkla S_9'un altkümesi olarak görebiliriz. Nitekim S_6'nın her elemanı, S_9'un 7, 8 ve 9'u sabitleyen bir elemanı olarak görülebilir.

1- Bu eşleşmelere bazen ***permütasyon*** da denir.

	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
Id	1	1	1	1	1	1	1
(12)	$\underline{1}$	**3**	6	$\underline{10}$	$\underline{15}$	$\underline{21}$	$\underline{28}$
(123)		$\underline{2}$	**8**	20	40	70	112
(12)(34)			$\underline{3}$	15	45	105	210
(1234)			6	**30**	90	210	420
(12)(345)				20	120	420	1120
(12345)				24	**144**	504	1344
(12)(34)(56)					$\underline{15}$	105	420
(12)(3456)					90	630	2520
(123)(456)					40	280	1120
(123456)					120	**840**	3360
(12)(34)(567)						210	1680
(12)(34567)						504	4032
(123)(4567)						420	3360
(1234567)						720	**5760**
(12)(34)(56)(78)							105
(12)(34)(5678)							1260
(12)(345)(678)							1120
(12)(345678)							3360
(123)(45678)							2688
(1234)(5678)							1260
(12345678)							5040
Toplam	2	6	24	120	720	5040	40320

3. Hangi Tipten Kaç Eleman Var?

Biraz hesap yapalım. S_n'de "tipi" aynı olan elemanların sayısını hesaplayalım.

Örneğin (12) gibi ikili devir biçiminde yazılabilen kaç eleman vardır? Eğer $n = 4$ ise 6 tane vardır: (12), (13), (14), (23), (24), (34). Eğer $n = 5$ ise, 10 tane vardır: (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), (45).

Genel olarak bu tip elemanlardan n'nin ikilisi kadar, yani C_2^n tane vardır[1].

Ya (123) gibi yazılabilen kaç eleman vardır? C_3^n tane değil. Çünkü seçtiğimiz her üçlü için iki ayrı seçeneğimiz var. Örneğin, 1, 2, 3 seçilmişse, bu sayılarla elde edeceğimiz (123) ve (132) gibi iki ayrı eşleşme var. Bu tipten toplam $C_3^n \times 2$ tane eleman vardır.

Ya (12)(34) tipinden? Birinci çift için C_2^n seçenek var. İkinci çift için C_2^{n-2} tane seçenek vardır. Ancak bu iki sayıyı çarparsak yanlış sonuç buluruz. Çünkü böyle yaparsak (12)(34) ve (34)(12)'yi sanki iki ayrı elemanmış gibi iki kez sayarız. Çarpımı ikiye bölmek gerekir. Sonuç olarak, (12)(34) tipinden $C_2^n \times C_2^{n-2}/2$ tane eleman vardır.

1- Tipografik nedenlerden dolayı, $\binom{n}{k}$ yerine (n seç k), Fransız geleneğine uyarak, C_k^n yazacağız.

Aynı tipten olan elemanlara ***eşlenik*** denir. Eşlenik elemanların tümünden oluşan kümeye de ***eşleniklik sınıfı*** denir.

Soldaki tabloda $n = 2, ..., 8$ için, S_n'de her eşlenik sınıfında kaç eleman olduğunu hesapladık. Her kolonun altında bulduğumuz sayıları toplayarak, toplamın $n!$ olup olmadığını kontrol ettik. Böylece yaptığımız hesapların sağlamasını yapmış olduk. (Gene de hata olabilir! Yanlışa tahammülü olmayan okur kendi başına hesaplamalıdır bu sayıları.)

En fazla eleman olan sınıfları koyu harflerle, Id'ninki dışında en az eleman olan sınıfları da altı çizili gösterdik.

Belli ki, eğer $n \geq 4$ ise en az (12) tipinde eleman var. Bunun kanıtını (dolayısıyla doğru olup olmadığını da) bilmiyorum. Kanıtlayana ödül ve bir bravo!

Ve gene belli ki S_n'de en kalabalık sınıf

$$(12 \ldots n-1)$$

sınıfı. Bu sınıfın $n(n-2)!$ tane, yani

$$\frac{n!}{n-1}$$

tane elemanı var. Bir başka deyişle, her n–1 elemandan biri bu tipten (yani bu eşleniklik sınıfında). Bunun da kanıtını bilmiyorum. Bunu da doğru kanıtlayana ödül var!

Eşlenik Sınıfı Sayısı. Peki S_n'de kaç tür, yani kaç eşleniklik sınıfı var? Yukarda $n = 8$'e kadar eşleniklik sınıflarını teker teker bulduk. Biraz daha ileri gidelim:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sınıf sayısı	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77

S_n'deki eşleniklik sınıfı sayısı aslında n sayısının parçalanış sayısına eşittir. Örneğin, eğer $n = 6$ ise,

$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	Id sınıfı
$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	(12) sınıfı
$6 = 3 + 1 + 1 + 1$	(123) sınıfı
$6 = 2 + 2 + 1 + 1$	(12)(34) sınıfı
$6 = 4 + 1 + 1$	(1234) sınıfı
$6 = 3 + 2 + 1$	(123)(45) sınıfı
$6 = 5 + 1$	(12345) sınıfı
$6 = 2 + 2 + 2$	(12)(34)(56) sınıfı
$6 = 4 + 2$	(1234)(56) sınıfı
$6 = 3 + 3$	(123)(456) sınıfı
$6 = 6$	(123456) sınıfı

Bir doğal sayının ***parçalanış sayısı***, o sayıyı (sıra gözetmeden) doğal sayıların toplamı olarak kaç türlü yazılabileceğidir. Dolayısıyla 6'nın parçalanış sayısı yukarda görüldüğü gibi 11'dir, S_6'nın eşleniklik sınıfı sayısına eşittir. Genel olarak, S_n'nin eşleniklik sınıfı sayısı n'nin parçalanış sayısına eşittir. Bugün bile üzerine pek çok araştırmalar yapılan parçalanış sayısı üzerine ilerdeki sayfalarda bir yazı bulacaksınız. (sayfa 25)

4. S_n'de Çarpma. S_n'de bileşke alınacağını biliyoruz. Yukardaki yöntemle bileşke almak oldukça kolaydır. Örneğin, diyelim, (15)(347)'yla (1234)(56)'nin bileşkesini almak istiyoruz. Bileşkeyi almak istediğimiz sıraya göre bu iki elemanı yanyana koyalım önce:

$$(1234)(56)\ (15)(347)$$

Bakalım 1 nereye gitmiş?

$$(1234)(56)\ (15)(347) = (1?..$$

Sağdan başlayarak her parantezi teker teker yoklayacağız. Sağdaki ilk (347) parantezinde 1 yok. Demek ki bu parantez 1'i 1'e gönderiyor. İkinci parantez 1'i 5'e gönderiyor. Üçüncü parantez 5'i 6'ya gönderiyor. En soldaki parantez de 6'yı 6'ya gönderiyor. Demek ki yukardaki bileşke 1'i 6'ya gönderiyor. Soru işareti yerine 6 yazalım:

$$(1234)(56)\ (15)(347) = (16?..$$

Bunu şöyle de gösterebilirdik:

$$\begin{array}{ccccccc} (1234) & & (56) & & (15) & & (347) \\ 6 & \leftarrow & 6 & \leftarrow 5 \leftarrow & 1 & \leftarrow & 1 \end{array}$$

Şimdi sıra 6'da. Bakalım 6 nereye gidecek?

$$\begin{array}{ccccccc} (1234) & & (56) & & (15) & & (347) \\ 5 & \leftarrow & 5 & \leftarrow 6 \leftarrow & 6 & \leftarrow & 6 \end{array}$$

Demek ki 6 da 5'e gidiyor. Yani

$$(1234)(56)\ (15)(347) = (165?..$$

Şimdi sıra 5'te. 5'in 2'ye gittiği kolaylıkla anlaşılır. Sıra 2'ye geldi. 2, 3'e gider. 3 de 1'e gider. Devir kapanmıştır:

$$(1234)(56)\ (15)(347) = (16523)?..$$

Daha 4'le başlayan deviri hesaplamamışız. Onu da tamamlayalım.

$$(1234)(56)\ (15)(347) = (16523)(47).$$

Bundan böyle "bileşke almak" yerine "çarpmak" diyeceğiz. Böylece "gücünü almak" ve "tersini bulmak" gibi terimleri de kullanabileceğiz.

S_n'nin bir elemanının gücünü alırken, ortak sayıları olmayan devirlerin yerlerini değiştirebileceğimizi bilmek çok yararlıdır. Örneğin, (123)(45) = (45)(123) olduğundan,

$$((123)(45))^8 = (123)^8(45)^8,$$

ve $(123)^3 = (45)^2 = 1$ olduğundan,

$$(123)^8 = (123)^2 = (132) \text{ ve } (45)^8 = \mathrm{Id}$$

eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla,

$$((123)(45))^8 = (123)^8(45)^8 = (132).$$

Dikkat edin, çarparken elemanların yerlerini her zaman değiştiremezsiniz. Örneğin $(12)(23) \neq (23)(12)$.

Birkaç çarpma örneği:

(1234)(356) = (123564)
(1234)(243) = (12)
(123)(234)(345)(567) = (12)(4567)
(12)(23)(34)(45) = (12345)
(12345)(15432) = Id
(12)(34)(1432)(34)(12) = (1234)
(12)(123)(1234) = (134)
(15)(14)(13)(12) = (12345)
(12)(14253)(12) = (15324)

Güç Alma:

$(12)^2 = \mathrm{Id}$
$(123)^2 = (132)$
$(123)^3 = \mathrm{Id}$
$(1234)^2 = (13)(24)$
$(1234)^3 = (1432)$
$(1234)^4 = \mathrm{Id}$
$(12345)^2 = (13524)$
$(12345)^3 = (14253)$
$(12345)^4 = (15432)$
$((12)(345))^2 = (354)$
$((12)(34))^3 = (12)(34)$
$((12)(3456))^3 = (12)(3654)$
$((123)(4567))^3 = (4765)$
$((12)(345)(6789))^6 = (68)(79)$
$((1234)(56789))^{20} = \mathrm{Id}$

Tersini Alma:

$\mathrm{Id}^{-1} = \mathrm{Id}$
$(12)^{-1} = (12)$
$(123)^{-1} = (123)^2 = (132)$
$(1234)^{-1} = (1234)^3 = (1432)$
$(12345)^{-1} = (12345)^4 = (15432)$
$((12)(34))^{-1} = (12)(34)$
$((123)(456))^{-1} = (132)(465)$
$(1234567)^{-3} = (1234567)^4 = (1526374)$

Yukardaki gri karelerde çarpma, güç alma ve tersini alma örnekleri verdik. Okur kendi örneklerini kendi bulabilir. Bu yöntemle bir elemanın tersi de kolay bulunur. Örnekler yukarıda.

5. Elemanların Dereceleri. S_n'nin bir elemanının ***derecesi*** (***mertebesi***), o elemanı Id yapan en küçük pozitif güçtür; daha açık bir ifadeyle, eğer $\alpha \in S_n$ ise, α'nın derecesi $\alpha^n = \mathrm{Id}$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif n doğal sayısıdır. α elemanının derecesi $o(\alpha)$ olarak yazılır. Örneğin,

$$(1234)^2 = (13)(24),$$
$$(1234)^3 = (1432),$$
$$(1234)^4 = Id_4$$

olduğundan, $o(1234) = 4$.

Belli ki $o(12\ ...\ n) = n$. Yani devirin uzunluğu derecesine eşittir.

Ve $o(\mathrm{Id}) = 1$ her zaman. Id, derecesi 1 olan tek elemandır elbet.

Başka örnekler yanda. Derecesi 2 olan elemanlar, (12), (23), (13), (12)(34), (12)(34)(56) gibi ikilik ayrık devirler halinde yazılan elemanlardır.

$o(12) = 2$
$o(123) = 3$
$o((12)(34)) = 2$
$o(1234) = 4$
$o((12)(345)) = 6$
$o((12)(3456)) = 4$
$o((123)(456)) = 3$
$o((12)(345)(6789)) = 12$
$o((1234)(56789)) = 20$

Yalnız dikkatli olun, (12)(23) elemanının derecesi 2 değil 3'tür, çünkü burada (12) ve (23) devirleri ayrık devirler değildir. Nitekim, $o((12)(23)) = o(123) = 3$.

Ayrık devirlerin çarpımlarının derecesi, devirlerin uzunluğunun (yani derecelerinin) en küçük ortak çarpımıdır. Bu, bariz.

Aynı devir yapısına sahip yani aynı tipte elemanların dereceleri eşittir elbet. Örneğin, (1234)(567) ve (164)(2537) elemanlarının dereceleri eşittir (12'ye).

S_n'de en büyük derece kaçtır? Bu çok daha zor bir soru. Birkaç yanıt verdik aşağıda.

n	eleman	maks. derece
1	Id_1	1
2	(1 2)	2
3	(1 2 3)	3
4	(1 2 3 4)	4
5	(1 2 3)(4 5)	6
6	(1 2 3 4 5 6)	6
7	(1 2 3)(4 5 6 7)	12
8	(1 2 3)(4 5 6 7 8)	15
9	(1 2 3 4)(5 6 7 8 9)	20
10	(1 2)(3 4 5)(6 7 8 9 10)	30
11	(1 2 3 4 5)(6 7 8 9 10 11)	30
12	(1 2 3)(4 5 6 7)(8 9 10 11 12)	60

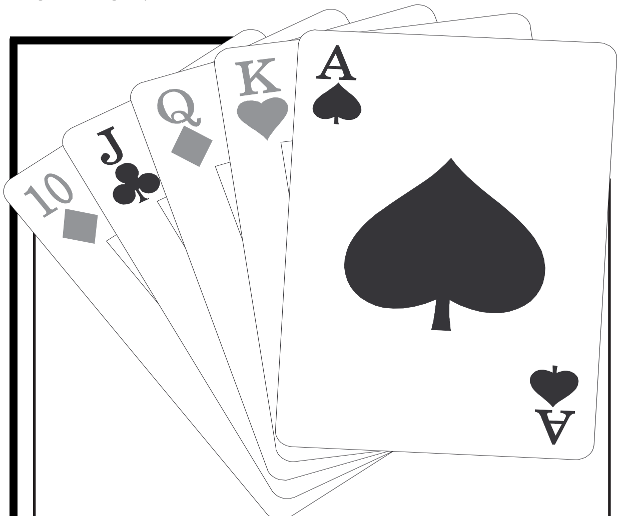
$d(n)$, S_n'deki en büyük derece olsun. Örneğin, yandaki çizelgeden $d(12) = 60$ olduğu görülüyor.

$d(n)$ fonksiyonu n'ye göre nasıl artıyor? Hiçbir fikrim yok. İki adımda bir ikiyle çarpılıyor gibi gözüküyor, yani sanki bir polinom gibi artmıyor.

$d(n)$, elbette, n'nin parçalanışlarının parçalarının en büyük en küçük ortak çarpımına eşit.

En büyük derece hakkında söyleyecekleriniz var mı? En büyük dereceyi hesaplayan bir bilgisayar programı yapabilir misiniz? (Elbette yapılabilir! Ama marifet çabuk çalışan bir program yapmakta.)

Ya $d(n)$'nin n'yle birlikte nasıl arttığını bulabilir misiniz? Örneğin, her n için $d(n) \leq Cn^k$ eşitsizliğini sağlayan bir C ve k var mı? Sanmam. ♠



Mükemmel Karma

52'lik iskambil kâğıdı destesini şu yöntemle karmak istiyoruz: Desteyi tam ortadan (26–26) ikiye ayıralım. Destenin üst yarısı sol elimizde, alt yarısı sağ elimizde olsun… Sonra, bilinen fiyakalı yöntemle, alttan başlamak üzere, bir kâğıt sağ desteden, bir kâğıt sol desteden olmak üzere sırayla kâğıtları karalım. Önce sağ desteden başlayacağız, bu önemli. Yani en üstteki ve en alttaki kâğıtlar yerinde kalacaklar, üstten 27. kâğıt karmadan sonra üstten ikinci kâğıt olacak, üstten ikinci kâğıt üstten üçüncü kâğıt olacak, üstten 28. kâğıt üstten dördüncü olacak, üstten üçüncü kâğıt üstten beşinci kâğıt olacak...

Bu işlemi kaç kez tekrarlarsak kâğıtlar eski yerlerine gelirler?

Bu sorunun yanıtını bulmak için aşağıdaki eşleşmenin derecesini bulmalıyız. (Neden?)

(1)(2, 27, 14, 33, 17, 9, 5, 3) (4, 28, 40, 46, 49, 25, 13, 7) (6, 29, 15, 8, 30, 41, 21, 11) (10, 31, 16, 34, 43, 22, 37, 19)(12, 32, 42, 47, 24, 38, 45, 23)(18, 35)(20, 36, 44, 48, 50, 51, 26, 39)(52)

Bundan da tam sekiz karmada kâğıtların eski yerlerine geldikleri çıkar.

Ya önce sol desteden kâğıt alsaydık, yani üstten 27. kâğıt birinci kâğıt olsaydı? O zaman destenin eski haline gelmesi için kaç kez karmalıyız?

Bu ikinci sorunun yanıtını bulmak için aşağıdaki eşleşmenin derecesini hesaplamalıyız. (Neden?)

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 11, 22, 44, 35, 17, 34, 15, 30, 7, 14, 28, 3, 6, 12, 24, 48, 43, 33, 13, 26, 52, 51, 49, 45, 37, 21, 42, 31, 9, 18, 36, 19, 38, 23, 46, 39, 25, 50, 47, 41, 29, 5, 10, 20, 40, 27)

Demek ki bu sefer tam 52 karma sonunda ilk başladığımız duruma geleceğiz.

2*n* kâğıtlı bir desteyi bu yöntemlerden biriyle kararsak, kâğıtlar kaç karmada en baştaki duruma gelirler? ♠