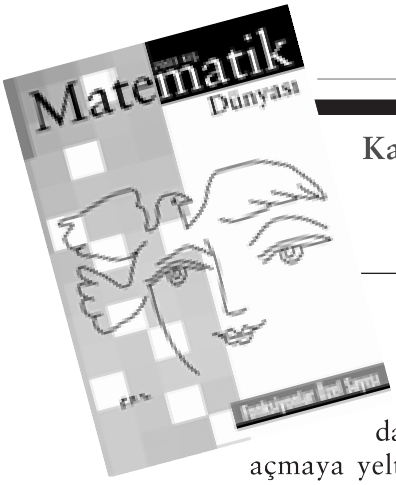


Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Schröder-Bernstein Teoremi

Eğer $A \leq B$ ve $B \leq A$ ise, o zaman $A = B$. Bu önermenin doğruluğundan bu derginin sayfalarını açmaya yeltenen kimsenin kuşkusu olamaz.

Açık açık söylemedik ama, yukarda A ve B'yi sonlu sayılar olarak aldık. Ya A ve B'yi sonsuz sayı olarak alsaydık ne olurdu?

Sonsuz sayı da ne demek!

Sonsuz sayıdan ziyade, bir kümenin eleman sayısından sözedelim. A ve B birer küme olsunlar. Eğer A'dan B'ye giden birebir bir fonksiyon varsa, sezgimiz, A kümesinin eleman sayısının, B kümesinin eleman sayısından küçük ya da eşit olması gerektiğini söylüyor. Bu durumda, yani A'dan B'ye giden birebir bir fonksiyon varsa, $A \leq B$ yazalım. Eğer A'yla B arasında bir eşleme varsa, o zaman da $A \approx B$ yazalım. Ve şimdi yukarda sayılar için yazdığımız,

"Eğer $A \leq B$ ve $B \leq A$ ise, o zaman $A = B$"

önermesini bu dile (kümeler diline) uyarlayalım:

"Eğer $A \leq B$ ve $B \leq A$ ise, o zaman $A \approx B$."

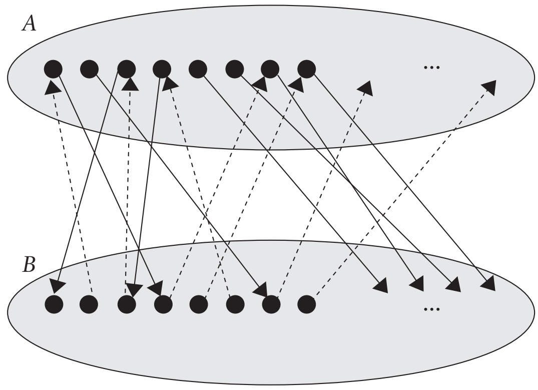
Bu ikinci önerme doğru mudur? Yani A kümesinden B kümesine giden birebir bir fonksiyon varsa ve B kümesinden A kümesine giden birebir bir fonksiyon varsa, o zaman A kümesiyle B kümesi arasında bir eşleme var mıdır?

Bu soruyu ilk soran, modern kümeler kuramını nerdeyse tek başına bulan Rusya doğumlu ünlü Alman matematikçisi Georg Cantor'dur. Soruyu sormuş ama yanıtlayamamıştır.

Soruyu Schröder (Alman, 1841-1902) ve Bernstein (Rus, 1880-1966) yanıtlamıştır:

Teorem. *A ve B iki küme olsun. Eğer A'dan B'ye giden ve B'den A'ya giden birebir fonksiyonlar varsa, o zaman A'yla B arasında bir eşleme vardır.*

Kanıt: A'dan B'ye giden birebir fonksiyona f, B'den A'ya giden birebir fonksiyona g diyelim. Aşağıdaki "çizge"ye bakalım. Üst kata A'nın elemanlarını yazdık, alt kata da B'nin elemanlarını[1]. Bir $a \in A$ ve bir $b \in B$ için, eğer $f(a) = b$ ise a'dan b'ye giden bir ok çıkardık, eğer $g(b) = a$ ise b'den a'ya giden bir ok çıkardık. Alttan üste doğru giden g okları daha kolay ayrıştırılsın diye noktalı çizdik, yukardan aşağıya giden f oklarını düz çizgiyle çizdik. Böylece bir "çizge" oluşturmuş olduk. Yönlendirilmiş ve iki kampa ayrılmış bir çizge...



Bu çizgenin şu iki özelliği var:

1) Her noktadan tam bir ok çıkıyor. (Çünkü f ve g fonksiyondur.)

2) Her noktaya en fazla bir ok giriyor. (Çünkü f ve g fonksiyonları birebirdir.)

A'dan herhangi bir a noktası alalım ve bu noktadan başlayarak ve okların **ters yönünü** izleyerek gidebildiğimiz sürece bir aşağı bir yukarı gidelim. İki şık var: Ya sonsuza kadar böylece gidebiliriz (okların ters yönünde) ya da belli bir süre sonra yolumuza devam edemeyiz (çünkü geldiğimiz o noktaya bir ok girmemiştir). İkinci şıkta iki olasılık var: Yolumuz ya A'nın bir noktasında ya da B'nin bir noktasında sona ermiştir. Eğer yolumuz B'nin bir noktasında sona ermişse, a'ya **B'de biten nokta** diyelim.

Örneğin, yukardaki şekilde, A'nın en soldaki birinci noktası B'de biter, hem de tek adımda. Oysa A'nın ikinci noktası A'da biter, okların ters yönüne doğru tek adım bile atamaz. A'nın üçüncü noktası B'de biter, tam üç adımda...

Eğer $a \notin g(B)$ ise, a, B'de biten bir nokta olamaz, çünkü a'dan öteye okların ters yönüne doğru bir adım bile atamayız.

a'dan başlayan bir yol şöyle gider:

$$a,\ g^{-1}(a),\ f^{-1}(g^{-1}(a)),\ g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(a))),\ldots$$

(Burada $f(a) = b$ ise $f^{-1}(b) = a$ yazıyoruz. Aynı

1. A ve B kümelerinin ayrık olduklarını (yani kesişmediklerini) varsayabiliriz: Örneğin A yerine $A \times \{0\}$'ı, B yerine $B \times \{1\}$'i alabiliriz.

şekilde $g(b) = a$ ise $g^{-1}(a) = b$ yazıyoruz.) Gidebildiğimiz yere kadar... Bu yol B'de bitiyorsa o zaman a'ya B'de biten bir nokta diyoruz. Bu yol hiç bitmiyorsa ya da A'da bitiyorsa, o zaman a, B'de bitmeyen bir noktadır.

Şimdi A'dan B'ye giden bir h fonksiyonu tanımlayacağız. İşte h'nin kuralı:

$$h(a) = \begin{cases} g^{-1}(a) \text{ eğer } a,\ B\text{'de biten bir noktaysa} \\ f(a) \text{ eğer } a,\ B\text{'de biten bir nokta değilse} \end{cases}$$

Bunun bir fonksiyon, dahası bir eşleme olduğu savını ortaya atıyor ve hemen kanıtlıyorum.

Bir. *h bir fonksiyondur.*

Kanıt: h'nin fonksiyon olmasını engelleyebilecek tek durum, yani ortaya çıkabilecek tek sorun, h'nin A'nın her noktasında tanımlanmamış olmasıdır. (Tanımlandığı yerde $h(a)$'nın tek bir değer olduğu bariz.) Şimdi $a \in A$ olsun. Eğer ikinci şıktaysak, yani a, B'de biten bir nokta değilse, o zaman $h(a) = f(a)$ olarak tanımlanmış. Bu durumda bir sorun yok: $h(a)$ bal gibi de tanımlanmış! Birinci şıkta, yani a'nın B'de biten bir nokta olduğu şıkta, $h(a)$'yı $g^{-1}(a)$ olarak tanımlamak istiyoruz. Demek ki bu durumda $g(b) = a$ eşitliğini sağlayan bir $b \in B$ bulmalıyız ki $h(a) = b$ olsun. Böyle bir $b \in B$ bulabilir miyiz? Evet, çünkü a noktası B'de biten bir noktadır, dolayısıyla a'ya giren bir ok olmalı (ki okların ters istikametine giden yolda bir adım olsun gidebilelim.) Demek ki g fonksiyonu a'ya dokunur, yani $g(b) = a$ eşitliğini sağlayan bir $b \in B$ vardır (ve tek bir tane öyle bir $b \in B$ vardır, çünkü g birebir bir fonksiyondur.)

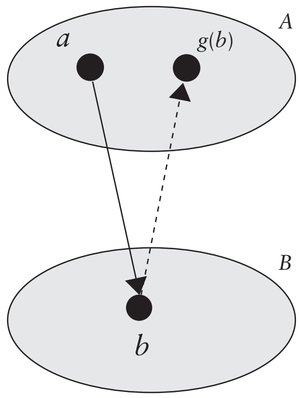
"Matematikte soru sorma sanatı, yanıt bulma sanatından daha saygıdeğer bir yerde olmalıdır."

Georg Cantor

İki. *h örten bir fonksiyondur.*

Kanıt: $b \in B$ olsun. Eğer $g(b)$, B'de biten bir noktaysa, o zaman $h(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$ ve bu durumda bir sorun yok, h fonksiyonu b'ye dokunmuş.

Eğer $g(b)$, B'de biten bir nokta değilse (aşağıdaki şekle bkz.), o zaman b'ye giren bir ok olmalı (yoksa $g(b)$'den başlayan yol b'de biter ve $g(b)$, B'de biten bir nokta olurdu.) Demek ki, belli bir $a \in A$ için $b = f(a)$ eşitliği doğru. Ama a, B'de biten bir nokta olamaz, çünkü $g(b)$'den başlayan yol a'dan geçmek zorunda (o yol önce b'ye, sonra da a'ya gider), dolayısıyla a, B'de biten bir



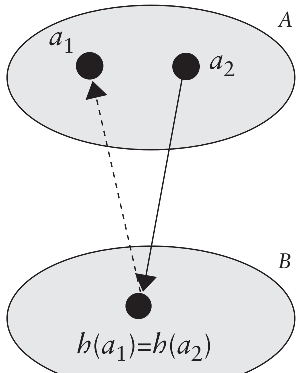
nokta olsaydı, $g(b)$ de B'de biten bir nokta olurdu. Demek ki h fonksiyonunun tanımına göre $h(a) = f(a) = b$. Bu durumda da h fonksiyonu b'ye dokundu.

Üç. *h birebir bir fonksiyondur.*

Kanıt: Diyelim $a_1, a_2 \in A$ için $h(a_1) = h(a_2)$. Bu iki elemanın eşit olduklarını, yani $a_1 = a_2$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

Eğer ne a_1 ne de a_2, B'de biten nokta değillerse, o zaman $f(a_1) = h(a_1) = h(a_2) = f(a_2)$. Bundan da, f birebir olduğundan, $a_1 = a_2$ çıkar.

Eğer hem a_1 hem a_2, B'de biten noktalarsa, o zaman $g^{-1}(a_1) = h(a_1) = h(a_2) = g^{-1}(a_2)$. Bundan da, $a_1 = a_2$ çıkar.



Diyelim a_1 noktası B'de bitiyor ama a_2 noktası B'de bitmiyor. O zaman $g^{-1}(a_1) = h(a_1) = h(a_2) = f(a_2)$. Demek ki yukardaki şekildeki gibi bir durum söz konusu. Ama a_1'den çıkan yol a_2'den geçmek zorunda. Öte yandan a_2, B'de bitmiyor. Demek ki a_1 de B'de bitemez. Ama hani a_1 noktası B'de bitiyordu? Bu bir çelişkidir.

Bernstein-Schröder teoremi kanıtlanmıştır! ♠