Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Sonsuzu Saymak

1. $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ arasında eşleme. Sonsuz Odalı Otel yazısında $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesiyle doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ kümesi arasında aşağı yukarı bir eşleme olduğunu gördük. Bu iki küme arasında gerçekten bir eşleme kurabiliriz. İşte o eşleme:

$$f(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu bu iki küme arasında bir eşlemedir.

X kümesinden Y kümesine giden bir eşleme varsa, bunu $X \approx Y$ olarak gösterelim. Bu ilişkiyi, X ve Y kümelerinin "eleman sayısı aynı" olarak yorumlayabiliriz. Eğer X sonluysa, bildiğimiz kavramdır bu, ama X sonsuzsa yepyeni bir kavram bulmuş oluruz.

- Her X kümesi için $\mathrm{Id}_X : X \to X$ bir eşlemedir. Demek ki $X \approx X$.
- Eğer $f : X \to Y$ bir eşlemeyse, $f^{-1} : Y \to X$ de bir eşlemedir. Demek ki eğer $X \approx Y$ ise $Y \approx X$.
- Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ birer eşlemeyse, $g \circ f : X \to Z$ bir eşlemedir. Demek ki eğer $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise, $X \approx Z$'dir.

Demek ki $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. Tabii $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ ilişkisinden, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ ilişkileri çıkar. Bunu kolaylıkla genelleştirebiliriz:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ \dots \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}.$$

Gene aynı yazıda,

$$\mathbb{N} \approx 2\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{0\} \approx \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

ilişkilerini gördük. Genel olarak, eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ise, ya A sonludur ya da $A \approx \mathbb{N}$. Bunun kanıtı oldukça kolay: Eğer A sonsuzsa, $f : \mathbb{N} \to A$ göndermesi,

$$f(n) = A\text{'nın } (n+1)\text{inci elemanı}$$

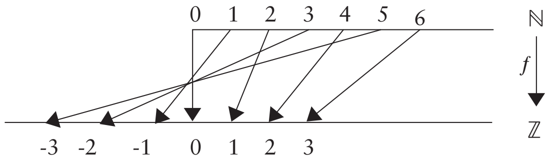
olarak tanımlansın. f bir eşlemedir. Örneğin asal sayılar kümesiyle doğal sayılar arasında bir eşleme vardır.

Bu yazıda beklenmedik kümeler arasında eşlemeler bulacağız.

2. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ arasında eşleme. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunu, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi,

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ \dfrac{-n-1}{2} & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Yukarıda tanımlanan bu f fonksiyonu $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$ kümeleri arasında bir eşlemedir, şekli de aşağıdadır.



$\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$ arasındaki eşleme

3. $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ ve $\mathbb{N}$ Arasında Eşleme. Şimdi $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ ile $\mathbb{N}$ kümeleri arasında bir eşleme bulalım.

Birinci Yöntem. $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden fonksiyonu aşağıdaki karede gösterildiği gibi tanımlayalım.

0/1	1/1	1/2	2/1	1/3	3/1	1/4	2/3	3/2	4/1	1/5	5/1	1/6	2/5	3/4	4/3	5/2	6/1	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...

İki kümeyi nasıl eşleştirdiğimi anlatalım: a/b kesirli sayılarını önce $a + b$ toplamının büyüklüğüne göre diziyoruz (önce toplamı 1 olanlar, sonra 2 olanlar...), sonra küçük a'dan büyük a'ya gidiyoruz. Tabii aradan daha önce sıraladığımız sayıları çıkarıyoruz. Örneğin, $a + b = 8$ olduğu kesirli a/b sayılarını şöyle diziyoruz:

1/7, 3/5, 5/3, 7/1.

(2/6, 4/4 ve 6/2 daha önce dizilmişti.) Daha sonra şu kesirli sayılar geliyor:

1/8, 2/7, 4/5, 5/4, 7/2, 8/1.

Ardından

1/9, 3/7, 7/3, 9/1

sayıları geliyor.

Bu yöntemle 52/47 kesirli sayısının hangi doğal sayıyla eşleştirildiğini bulmak kolay değildir.

Farey'in Yöntemi. Çok tuhaf gelebilecek bir başka eşleştirme daha vardır. İlkokulda sık sık yapılan

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

hatasını kullanır bu yöntem. 0/1 ve 1/0 "sayı"larından başlayalım (1/0 "sayısını" umursamayın şimdilik):

$$\frac{0}{1},\frac{1}{0}$$

Bu iki "sayı"nın ortasına, "toplam"ları olan

$$\frac{0}{1}+\frac{1}{0}=\frac{1}{1}$$

sayısını yazalım:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{0}$$

İki yeni aralığımız var şimdi: [0/1, 1/1] ve [1/1, 1/0] aralıkları. Bu aralıkların ortalarına uçların "toplam"larını, yani,

$$\tfrac{0}{1}+\tfrac{1}{1}=\tfrac{1}{2} \text{ ve } \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{0}=\tfrac{2}{1}$$

sayılarını yazalım:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{0}$$

Bu beş sayı dört yeni aralık belirliyor. Bu dört aralığın ortalarına aralıkların uçlarının "toplam"larını yazalım:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{1}{0}$$

Bunu böylece sürdürelim. Bir sonraki aşamada 0/1, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 1/1, 4/3, 3/2, 5/3, 2/1, 5/2, 3/1, 4/1, 1/0 sayıları belirir.

Böyle devam ederek her kesirli sayıyı yalnız bir kez ve sadeleşmiş biçimde yazarız... Bunun bildiğim kanıtı uzun ama oldukça kolaydır. Bu yüzden kanıtını vermeyeceğim.

Şimdi, kesirli sayıları Farey'in yukardaki açıkladığım yöntemle, beliriş sırasına göre sayın. Yalnız 1/0'ı atlamayı unutmayın, öyle bir sayı yoktur!

Matematikçi olmayan jeolog Farey hakkında daha fazla bilgiyi http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Farey.html sitesinde bulabilirsiniz.

4. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{N}$ Arasında Eşleme. Yukarda $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ ve $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme bulduk. Demek ki,

$$\mathbb{Q}^{\geq 0} \approx \mathbb{N} \approx 2\mathbb{N}.$$

Öte yandan,

$$\mathbb{Q}^{<0} \approx \mathbb{Q}^{>0} = \mathbb{Q}^{\geq 0} \setminus \{0\} \approx \mathbb{N} \setminus \{0\} \approx \mathbb{N} \approx 2\mathbb{N} + 1.$$

Dolayısıyla,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{\geq 0} \approx 2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N} + 1) = \mathbb{N}.$$

(Buradaki $\sqcup$ simgesi "bileşim" anlamına gelir, ancak, ayrıca, bileşimi alınan kümelerin ayrık olduklarına dikkati çeker.) Demek ki kesirli sayılarla doğal sayılar arasında bir eşleme var.

Tabii ki $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times ... \times \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$ ilişkisi de doğru.

Ayrıca, eğer A, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times ... \times \mathbb{Q}$ kümesinin sonsuz bir altkümesiyse, o zaman $A \approx \mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.

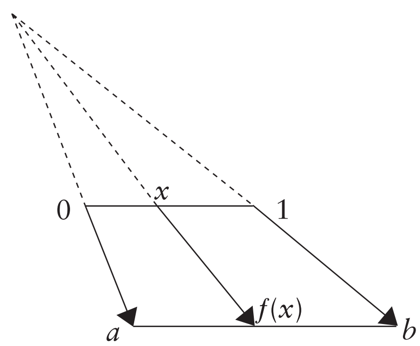
5. Sayılabilir Sonsuzluk. Bir kümeyle $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme olması, o kümenin sonsuz olduğunu, ama elemanlarının bir biçimde doğal sayılarla sayılabileceğini gösterir (demek ki o kadar da sonsuz değilmiş küme!) Bu yüzden $\mathbb{N}$ ile arasında eşleme olan kümelere ***sayılabilir sonsuzlukta kümeler*** denir.

Sayılamaz sonsuzlukta kümeler var mıdır? Evet. Az ilerde sayılamaz sonsuzlukta kümeler göreceğiz.

6. Aralıklar. Gerçel sayılar kümesinden bir (a, b) aralığı alalım. $a < b$ olsun ki aralık boş olmasın. Bu aralıkla $(0, 1)$ aralığı arasında bir eşleme vardır. Örneğin

$$f(x) = (b - a)x + a$$

kuralıyla tanımlanmış $f : (0, 1) \to (a, b)$ fonksiyonu bu iki aralık arasında bir eşlemedir. Bu eşleme aşağıdaki şeklin cebirsel halidir.



Burada, $(0, 1)$ aralığını önce $b - a$ ile çarparak, $(0, b - a)$ aralığı yapıyoruz, sonra a ekleyerek bulmak istediğimiz (a, b) aralığı yapıyoruz.

Yukardaki yöntemle, $[0, 1]$ ve $[a, b]$ gibi kapalı ve sınırlı aralıklar arasında da bir eşleme olduğu anlaşılır.

Peki, $(0, 1]$ aralığıyla $[0, 1)$ aralığı arasında bir eşleme var mı? Var elbet! İşte bunlardan biri: $f(x) = -x + 1$. Ya da şöyle: $(0, 1] \approx (0, 1) \cup \{1\} \approx (0, 1) \cup \{0\} = [0,1)$. Demek yarı açık sınırlı aralıklar arasında da bir eşleme var.

Daha zor bir soru: $(0, 1)$ açık aralığıyla $(0, 1]$ yarı açık aralığı arasında bir eşleme var mıdır?

Evet! İnanması güç ama var. İşte o eşlemelerden biri:

$$(0,\ 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \approx \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) = (0,\ 1).$$

(İkinci eşleme sonsuz tane eşleme bir araya konularak elde edilmiştir.)

Bundan da şu sonuç çıkar: $(0, 1) \approx (0, 1] = (0, 1) \cup \{1\} \approx (0, 1) \cup \{0\} \approx (0, 1] \cup \{0\} = [0, 1]$.

Demek tüm sınırlı aralıklar arasında eşleme var.

Peki $(0,1)$ ile $(0, \infty)$ aralıkları arasında bir eşleme var mı? Daha neler! Ama var. İşte bunlardan biri: $f(x) = 1/x - 1$.

Ya $(0, 1)$ aralığıyla reel sayılar arasında? O da var:

$$(0, 1) \approx (-1, 1) = (-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1) \approx (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, \infty) = \mathbb{R}.$$

Demek boş olmayan tüm aralıklar arasında bir eşleme var...

Hatta $(0, 1) \cup (2, 3)$ kümesiyle $(0, 1)$ kümesi arasında bile var. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

$\mathbb{R}^2$ kümesiyle $\mathbb{R}$ arasında da bir eşleme vardır. Cantor kanıtlamıştır bunu, zorlanarak da olsa.

7. Sayılamayan Sonsuzlukta Bir Küme. $\mathbb{R}$ sayılamayan sonsuzluktadır. Bunu kanıtlamak için $(0, 1)$ aralığının sayılamayan sonsuzlukta olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Diyelim, $(0, 1)$ aralığıyla $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme var. Bundan bir çelişki elde edeceğiz. Eşlemeye

$$f : \mathbb{N} \to (0, 1)$$

diyelim.

Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise, $f(n)$ reel sayısını onluk sisteme göre yazalım:

$$f(n) = 0.a_{n,0}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}...$$

Buradaki $a_{n,k}$ sayıları 0'la 9 arasında bir tamsayıdır, $f(n)$'nin rakamları bunlar. Yalnız bunu yaparken $a_{n,k}$ sayılarının bir zaman sonra hep 9 olmamalarına dikkat edelim, örneğin, 0,314 sayısını 0,3140000... olarak yazalım, 0,31399999... olarak değil.

> 0.9999.... sayısı 1'e eşittir. İnanılması güç olabilir ama doğru. İnanmazsanız çıkarma yapın: $1 - 0.9999... = 0.0000...$ en sona 1 koymak gerektiğini düşünebilirsiniz, ama en sonu yoktur ki bu dizinin. Dolayısıyla $1 - 0.9999... = 0$, yani $1 = 0.9999...$
>
> Bunu şöyle de "kanıtlayabiliriz": $x = 0.9999...$ olsun. Demek ki $10x = 9.9999...$ Dolayısıyla $9x = 10x - x = 9.9999... - 0.9999... = 9$, yani $x = 1$.

Şimdi b_n sayısı $a_{n,n}$ sayısından, sıfırdan ve dokuzdan değişik herhangi bir sayı olsun. Örneğin, b_n sayısını şöyle tanımlayabiliriz:

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{eğer } a_{n,n} \neq 2 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } a_{n,n} = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Demek ki $b_n \neq a_{n,n}$. Şimdi $0.b_0b_1b_2b_3b_4...$ sayısına bakalım. Bu sayı kesinlikle $(0, 1)$ aralığındadır. Demek ki, f örten olduğundan belli bir $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = 0.b_0b_1b_2b_3b_4...$ eşitliği doğrudur. Dolayısıyla, $a_{n,n} = b_n$ olmalı. Ama bu yanlış. Bir çelişki elde ettik. Demek ki $\mathbb{N}$ kümesiyle $(0, 1)$ aralığı arasında bir eşleme yokmuş, yani $\mathbb{R}$ sayılamaz sonsuzlukta bir kümeymiş.

Yukardaki kanıt matematikte çok ünlüdür ve bu fikir başka kanıtlarda da kullanılır. Bu fikre ***Cantor'un çarpraz yöntemi*** denir.

8. $\wp(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{R}$ arasındaki eşleme. $(0, 1)$ aralığının her sayısı onluk sistemde yazılabildiği gibi, ikilik sistemde de yazılabilir. (Aşağıdaki kareye bakın.)

> **İkilik Taban.** $r \in [0,1)$ aralığında bir gerçel sayı olsun. r'yi ikilik tabanda yazacağız. r, ikilik tabanda da 0,... diye başlayan bir sayı olacak. Sıfırdan sonra ilk rakamı belirleyelim. Eğer $r < 1/2$ ise ilk rakam 0 olsun. Eğer $r \geq 1/2$ ise ilk rakam 1 olsun. Diyelim $r < 1/2$. İkinci rakamı belirleyelim. Eğer $r < 1/4$ ise ikinci rakam 0 olsun, yoksa 1 olsun. Bunu böyle sürdürelin. r'nin ikilik tabanda yazılımını elde ederiz. Bu ikilik tabanda,
>
> $1/2 = 0.1000...$
> $1/3 = 0.01010101...$
> $0 = 0.00000...$
> $1/4 = 0.01000...$
>
> Bu yöntemle, sıfır ve birlerden oluşan bir $(a_i)_i$ dizisi için, $r = \sum_{i=1}^{\infty} a_i / 2^i$ eşitliği elde edilir.

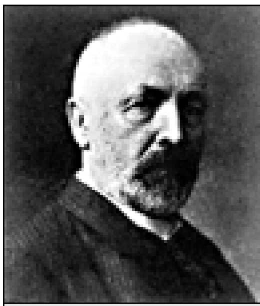
Virgülden önceki sıfırı atarsak, $(0, 1)$ aralığındaki her gerçel sayı sonu hep 1'le bitmeyen bir 0 ve 1 dizisine tekabül eder, yani $\mathbb{N}$'den $\{0, 1\}$ kümesine giden bir fonksiyona. Burada ayrıntılı kanıtını vermeyeceğiz ama bundan $\wp(\mathbb{N})$ ile $(0, 1)$ aralığı arasında (demek ki $\mathbb{R}$ ile de) bir eşleme olduğu çıkar.

9. Süreklilik Hipotezi. Bu son paragrafta çok önemli bir soru soracağız. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ sayılabilir sonsuzluktadır elbet. Öte yandan, yedinci paragrafta $\mathbb{R}$ kümesinin sayılamaz sonsuzlukta olduğunu gördük. Demek ki $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{R}$ arasında bir eşleme yok. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}$'ye giden birebir bir fonksiyon olduğundan, bir inanca göre (ve yaygın bir inanca göre!) bir anlamda ℝ'de ℕ'den daha fazla eleman olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi sorumuz soralım: Eğer $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ ise, X'le ℕ ya da ℝ kümeleri arasında mutlaka bir eşleme var mıdır? ***Süreklilik Hipotezi*** böyle bir eşlemenin mutlaka olduğunu söyler. Süreklilik Hipotezi doğru mudur?

Bilinemez! Bilinmiyor değil, bilinemez! Yukarda sorduğumuz sorunun olumlu ya da olumsuz bir yanıtı bugün matematikte kabul edilen belitlerle (aksiyomlarla) kanıtlanamaz[1]. Bunu Gödel ve Cohen'in teoremlerinden biliyoruz.

Bu konu ve daha fazlası http://www.ii.com/math/ch/#overview sitesinde var. ♠

1- Bugün kabul edilen belitler sistemine ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice) adı verilir. ZFC'nin belitlerinden süreklilik hipotezinin doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanamaz.



1. Süreklilik Hipotezi sorusunu ilk Cantor sormuştur. Hilbert 1900'de Paris'teki konferansta matematikçilere sorduğu meşhur 23 soru arasına bu soruyu da almıştır, hatta bu soruyu listesinin ilk sorusu yapmıştır.

2. Bu yazıdaki fikirler Cantor'a aittir. Ruh hastalığından dolayı yaşamı acı içinde geçen Cantor'un değerini ne yazık ki çağının birçok matematikçisi anlayamamıştı. Büyük matematikçi Hilbert anlayanlardandı. Bu sayının Topoloji köşesinde konu ettiğimiz (ve Hilbert'le birlikte o çağın en büyük matematikçisi) Poincaré ise anlaşılmaz bir biçimde bu tür soruları değersiz bulanlardandı. ♠

Georg Cantor (1845-1918)

Halk arasında "modern matematik" olarak bilinen kümeler kuramı 19. yüzyılın sonlarına doğru birdenbire ve çok büyük bir hızla gelişti. Örneğin, analizin ve geometrinin değişimi uzun yıllarda hatta birkaç yüzyılda gerçekleşmiştir. Oysa kümeler kuramı birkaç yıl içinde olağanüstü atılımlarda bulunmuştur. Bu gelişme büyük ölçüde Georg Cantor sayesinde olmuştur.

Cantor 1845'te Rusya'da Petersburg'da zengin bir tüccarın oğlu olarak dünyaya gelmiştir. 1856'da ailesiyle birlikte Almanya'ya göç etmiştir. Üç kardeşin en büyüğüdür. Üç kardeşin üçüne de annelerinden sanatçı duyarlılığı geçmiş ve müziğe, resme ve felsefeye ilgi duymuşlardır. Cantor özellikle felsefe ve teolojiyle yakından ilgilenmiştir.

Cantor genç yaşından itibaren matematiğe ilgi duyup matematik okumak istemiş, ancak pragmatik bir adam olan babası oğlunun mühendis olmasında ısrar etmiştir. Neyse ki oğul Cantor sonunda istediğini elde etmiştir. 1863'te Berlin Üniversitesi'nde matematik, fizik ve felsefe okumuştur.

Bitirme tezini sayılar kuramı üzerine yazmıştır; tezi Gauss'un yarım bıraktığı $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ denkleminin çözümleri üzerinedir.

1872'de Dedekind'le (1831-1916) tanışmasıyla Cantor'un yaşamında büyük değişimler olur. İki matematikçi uzun yıllar boyunca mektuplaşırlar. Mektuplarının birçoğu günümüze kadar korunmuştur. Anlaşılan o ki, Dedekind'in soyut düşünme biçiminden Cantor çok etkilenmiştir. Belki de kümeler kuramını biraz da Dedekind'e borçluyuz.

Sayılar kuramından sonra, Heine'nin etkisiyle trigonometrik sonsuz toplamlarla ilgilenen Cantor, buradan doğal olarak nokta-küme topolojisine el atmış, topolojiden de sonsuz sayılara ve kümeler kuramına sıçramıştır. Cantor'dan önce "sonsuzluk" kavramı matematikte sadece "sonlu"nun karşıtı olarak bilinirdi, oysa "sonlu"nun bile tam matematiksel bir tanımı yoktu. Cantor sonsuzluk kavramına gerçek boyutunu kazandırmıştır: Sonsuzlukları derecelendirmiş, onları bir nevi sayı olarak görmemizi sağlamıştır. Doğal sayıların (ℕ) sonsuzluğunun kesirli sayıların (ℚ) sonsuzluğuna eşit olduğunu, gerçel sayıların (ℝ) sonsuzluğunun doğal sayıların sonsuzluğundan büyük olduğunu ve $\mathbb{R}^n$ kümesinin sonsuzluğunun ℝ kümesinin sonsuzluğuna eşit olduğunu kanıtlamıştır. Ancak Cantor'un matematiksel düşünceleri matematik dünyasında genel kabul görmemiş, çetin kavgalara neden olmuş, daha da kötüsü, zaten psikolojik sağlığı zayıf olan Cantor'un sık sık hastanelerde yatmasına ve çalışamamasına neden olmuştur. Geleceği görme konusunda olağanüstü bir yeteneği olan çağdaşı Hilbert, büyük bir özgüvenle "Cantor'un bize sunduğu cennetten kimse bizi kovamaz" demiştir. ♠