



Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Sonsuz Odalı Otel

Bir oteliniz var. Otelinizin sonsuz sayıda odası var. Her odanın bir numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6,... Böylece sonsuza kadar gidiyor.

En sonuncu oda yok...

Sonsuz numaralı oda da yok... Her odanın numarası sonlu. Sadece oda sayısı sonsuz. Aşağıdaki gibi...

OTEL	1	2	3	4	5	6	7	8	...
------	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

Birinci Hikâye. Şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz sayıda müşteri... Müşterilerin adları 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

Her müşteriye birer oda veriyorsunuz. 1 nu-

OTOBÜS	1	2	3	4	5	6	7	8	...
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

maralı müşteriye 1 numaralı odayı, 2 numaralı müşteriye 2 numaralı odayı, 3 numaralı müşteriye 3 numaralı odayı...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire bir müşteri daha çıkageliyor. Bu müşteriye nasıl bir oda bulursunuz?

Yanıt: Yerleşmiş müşterileri bir oda kaydırırım. 1 numaralı müşteri 2 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 3 numaralı odaya, 3 numaralı müşteri 4 numaralı odaya geçer, herkes birer kayar ve böylece boşalan 1 numaralı odaya yeni gelen müşteriye koyarım...

“En son müşteri nereye gidecek?” demeyin, en son müşteri yok. Nasıl en son oda yoksa, en son müşteri de yok.

İkinci Hikâye. Gene şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz sayıda... Adları $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$

Hepsine birer oda veriyorsunuz. a_1 'i 1 numaralı odaya, a_2 'yi 2 numaralı odaya...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire... Birdenbire bir otobüs dolusu müşteri daha geliyor... Onda da sonsuz sayıda müşteri var. Adları $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots$ Odalarımız dolu... Sonsuz sayıda yeni müşteri geldi. Bu yeni müşterileri nasıl yerleştirirsiniz?

Yanıt: Birinci otobüsün müşterilerini çift sayı-

lı odalara koyarım: a_1 'i 2'ye, a_2 'yi 4'e, a_3 'ü 6'ya, a_4 'ü 8'e, genel olarak a_n 'yi $2n$ numaralı odaya koyarım. Böylece tek sayılı odalar boşalır, onlara da ikinci otobüsün müşterilerini yerleştiririm: b_1 'i 1'e, b_2 'yi 3'e, b_3 'ü 5'e, b_4 'ü 7'ye, genel olarak b_n 'yi $2n - 1$ numaralı odaya yerleştiririm...

Üçüncü Hikâye. Çok, ama çok şanslı bir gününüzdesiniz, sonsuz otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane otobüs... Her otobüsün bir numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

Ve her bir otobüste sonsuz sayıda müşteri var...

Birinci otobüsün müşterileri:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), ...

İkinci otobüsün müşterileri:

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), ...

Üçüncü otobüsün müşterileri:

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), ...

.....

Müşterileri odalara nasıl yerleştirirsiniz?

Yanıt: Birinci otobüsün müşterilerini 2, 4, 8, 16, 32, 64 gibi 2'nin katları olan odalara yerleştirirsiniz.

İkinci otobüsün müşterilerini 3, 9, 27, 81, 243 gibi 3'ün katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Üçüncü otobüsün müşterilerini 5, 25, 125, 625 gibi 5'in (4'ün değil!) katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Dördüncü otobüsün müşterilerini 7'nin katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Beşinci otobüsün müşterilerini 11'in katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Genel olarak, n 'inci otobüsün müşterilerini n 'inci asalın katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Bu yöntemle her müşteri bir odaya yerleştiği gibi, geriye sonsuz tane boş oda kalır. Örneğin, 6, 10, 12, 14, 15, 18 numaralı odalar boştur.

Bir Başka Çözüm. Son problemi bir başka türlü de çözebiliriz. (n, m) sayılı müşteriye, yani n inci otobüsün m inci müşterisini $2^n(2m - 1)$ numaralı odaya yerleştirelim... Böylelikle hepsine bir oda düşer. Aşağıdaki şekildeki gibi, otobüsleri sıralarla, müşterileri sütunlarla gösterelim, kolonlarla sütunların kesişimine de oda numarasını yazalım.

	1	2	3	4	...
1	2	6	10	14	...
2	4	12	20	28	...
3	8	24	40	56	...
4	16	48	80	112	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Sadece çift sayılı odalar kullanıldığından, sonsuz tane oda gene boş kalır.

Eğer bütün odaları kullanmak istiyorsak, (n, m) sayılı

müşteriyi $2^{n-1}(2m-1)$ numaralı odaya yerleştirelim, yani yukarıdaki oda numaralarını 2'ye bölelim... O zaman müşteriler aşağıdaki gibi yerleşirler:

	1	2	3	4	...
1	1	3	5	7	...
2	2	6	10	14	...
3	4	12	20	28	...
4	8	24	40	56	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

9 numaralı odanın boş kaldığını sanmayın. $9 = 2^0 \times 9 = 2^0 \times (2 \times 5 - 1)$ olduğundan, $(1, 5)$ sayılı müşteri (birinci otobüsün beşinci müşterisi) 9 numaraya yerleşir. 72 numaralı odaya da $(4, 5)$ sayılı müş-

teri yerleşir. Bu yöntemle her oda dolar.

Bir Başka Çözüm Daha: Müşterileri aşağıdaki şekildeki gibi yerleştirelim. Sıralar otobüsleri, sütunlar müşterinin numarasını simgelesin. Örneğin ikinci sırayla üçüncü sütunun kesişimi ikinci otobüsün üçüncü yolcusunu simgelesin. Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere bu yolcu 9 numaralı odada yatacak.

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	6	10	15	21
2	2	5	9	14	20	
3	4	8	13	19		
4	7	12	18			
5	11	17				
6	16					

Bu yerleştirmenin bir formülünü bulabilir misiniz? Örneğin, $(23, 45)$ sayılı müşterinin nereye gideceğini teker teker saymadan bulabileceğiniz bir formül yazabilir misiniz? ♠

Teorem. X herhangi bir küme olsun. X 'in altkümeler kümesi $\wp(X)$ ile X 'ten $\{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi arasında bir eşleme vardır.

Kanıt: X 'ten $\{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi 2^X olarak gösterilir.

Eğer $A \subseteq X$ ise, $f_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ şu fonksiyon olsun:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in A \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

Şimdi $f(A) = f_A$ olarak tanımlanmış $f : \wp(X) \rightarrow 2^X$ fonksiyonu bir eşlemedir. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. ♠

